



openHPI

Einführung in die Mathematik der Algorithmik – Umformungen

Timo Kötzing, Pascal Lenzner

Hasso-Plattner-Institut

Universität Potsdam

Warum **kompliziert** wenn's auch **einfach** geht?

- Hast du meine **Schokolade** gegessen? $= A$
- Ich habe **nicht** deine Schokolade **nicht** gegessen. $= \neg\neg A$
- Ich bin **nicht unsichtbar**.
- Ich bin sichtbar.

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
w	f	w
f	w	f

A und $\neg\neg A$ sind **äquivalent**.

$A \Leftrightarrow \neg\neg A$ ist **immer wahr** (so etwas nennt man eine **Tautologie**).

A	$A \Leftrightarrow \neg\neg A$		
w	w	w	w
f	f	w	f

- $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$.
- $A \Leftrightarrow B$ ist äquivalent zu $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Das coole an Umformungen: man kann sie auch **mitten in einer Formel** benutzen.

- $A \wedge (\neg\neg B) \wedge C$ ist äquivalent zu $A \wedge B \wedge C$.

Man darf in jeder Formel eine beliebige **Teilformel** durch eine **äquivalente Formel** ersetzen.

- $A \vee B$ ist äquivalent zu $B \vee A$.

Kommutativität von $\vee$

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	f	f

- $A \wedge B$ ist äquivalent zu $B \wedge A$.

Kommutativität von $\wedge$

- $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

Kontraposition

A	B	$A \Rightarrow B$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
w	w	w	f
w	f	f	w
f	w	w	f
f	f	w	w

- $A \vee B$ ist äquivalent zu $B \vee A$.

Kommutativität von $\vee$

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	f	f

- $A \wedge B$ ist äquivalent zu $B \wedge A$.

Kommutativität von $\wedge$

- $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

Kontraposition

A	B	$A \Rightarrow B$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

- $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	f	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	w	f

- $\neg(A \wedge B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg B)$.

- $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	f	$f \quad f \quad f$
w	f	f	$f \quad f \quad w$
f	w	f	$w \quad f \quad f$
f	f	w	$w \quad w \quad w$

- $\neg(A \wedge B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg B)$.

- $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	f	f
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

- $\neg(A \wedge B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg B)$.

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	w	f

- $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	f	f
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

- $\neg(A \wedge B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg B)$.

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	$f \quad f \quad f$
w	f	w	$f \quad w \quad w$
f	w	w	$w \quad w \quad f$
f	f	w	$w \quad w \quad w$

- $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	f	f
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

- $\neg(A \wedge B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg B)$.

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	f
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	w	w

- A ist äquivalent zu $\neg\neg A$.
- $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$.
- $A \Leftrightarrow B$ ist äquivalent zu $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
- $A \vee B$ ist äquivalent zu $B \vee A$.
- $A \wedge B$ ist äquivalent zu $B \wedge A$.
- $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.
- $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \wedge (\neg B)$.
- $\neg(A \wedge B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee (\neg B)$.

Doppelte Negation

Def Implikation

Def Äquivalenz

Kommutativität

Kontraposition

De Morgan

(4) Die Aussage "Der Baum vor der Hütte ist keine Ulme **und** der Schatz ist nicht unter dem Fahnenmast begraben" ist **nicht** wahr.

$$\neg(\neg VU \wedge \neg F)$$

$$(\neg\neg VU) \vee (\neg\neg F)$$

$$VU \vee F$$