



openHPI

Einführung in die Mathematik der Algorithmik

– Quantoren

Thomas Bläsius, Timo Kötzing

Hasso-Plattner-Institut

Universität Potsdam

Aus einem sehr bekannten Lied von Dean Martin



everybody loves somebody sometime

jeder liebt gelegentlich jemanden



Welche der folgenden Aussagen behauptet das Gegenteil?

- niemand liebt gelegentlich jemanden
- niemand liebt niemals niemanden
- es gibt jemanden, der niemals jemanden liebt
- jeder liebt immer niemanden
- jemand liebt immer niemanden

Ziel im Folgenden

- mathematische Sprache zur Formalisierung solcher Aussagen
- Umformungsregeln für solche mathematischen Aussagen

Was behauptet Dean Martin überhaupt?

jeder liebt gelegentlich jemanden
für jede Person gibt es einen Zeitpunkt zu dem sie eine Person liebt
für jede Person p_1 gibt es einen Zeitpunkt z und eine Person p_2 sodass:
 p_1 liebt p_2 zum Zeitpunkt z

Einzelne Bestandteile der Aussage

- betrachtete „Objekte“: Personen und Zeitpunkte $\rightsquigarrow$ Mengen P und Z
- ein **Prädikat** $L : P \times P \times Z \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ mit folgender Bedeutung:
 $L(p_1, p_2, z) = \text{true} \Leftrightarrow p_1 \text{ liebt } p_2 \text{ zum Zeitpunkt } z$
- ein **Allquantor**: „für alle Personen“ $\rightsquigarrow \forall p_1 \in P$
- **Existenzquantoren**: „Es gibt einen Zeitpunkt“ $\rightsquigarrow \exists z \in Z$
„Es gibt eine Person“ $\rightsquigarrow \exists p_2 \in P$

Fertige Formalisierung: $\forall p_1 \in P \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$

Aussage von Dean Martin

- jeder liebt gelegentlich jemanden

$$\forall p_1 \in P \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

Behauptet die folgende Aussage das Gegenteil?

- es gibt jemanden, der niemals jemanden liebt

$$\exists p_1 \in P \neg \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

Sind diese beiden Aussagen äquivalent?

$$\begin{array}{l} \blacksquare \neg \forall p_1 \in P \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z) \\ \blacksquare \exists p_1 \in P \underbrace{\neg \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)}_{X(p_1)} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \neg \forall p_1 \in P X(p_1) \\ \exists p_1 \in P \neg X(p_1) \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \text{äquivalent}$$

Negationsregel

- $\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$
- $\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$

Aussage von Dean Martin

- jeder liebt gelegentlich jemanden

$$\forall p_1 \in P \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

Behauptet die folgende Aussage das Gegenteil?

- es gibt jemanden, der niemals jemanden liebt

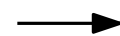
$$\exists p_1 \in P \neg \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

Sind diese beiden Aussagen äquivalent?

$$\neg \forall p_1 \in P \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

$$\exists p_1 \in P \neg \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

$X(p_1)$



$$\neg \forall p_1 \in P X(p_1)$$

$$\exists p_1 \in P \neg X(p_1)$$

äquivalent

Negationsregel

$$\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$$

Ein weiteres Beispiel

- nicht alle Schwäne sind weiß $\equiv$ es existiert ein Schwan, der nicht weiß ist



Aussage von Dean Martin

- jeder liebt gelegentlich jemanden

$$\forall p_1 \in P \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

Behauptet die folgende Aussage das Gegenteil?

- es gibt jemanden, der niemals jemanden liebt

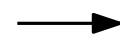
$$\exists p_1 \in P \neg \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

Sind diese beiden Aussagen äquivalent?

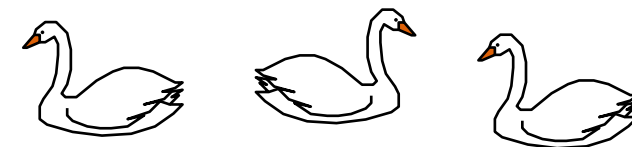
$$\neg \forall p_1 \in P \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

$$\exists p_1 \in P \neg \exists z \in Z \exists p_2 \in P L(p_1, p_2, z)$$

$X(p_1)$



$$\begin{array}{l} \neg \forall p_1 \in P X(p_1) \\ \exists p_1 \in P \neg X(p_1) \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \text{äquivalent}$$



Negationsregel

$$\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$$

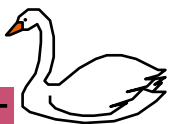
$$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$$

Ein weiteres Beispiel

- nicht alle Schwäne sind weiß $\equiv$ es existiert ein Schwan, der nicht weiß ist



- es existiert kein blauer Schwan $\equiv$ für jeden Schwan gilt, dass er nicht blau ist



Quantoren vertauschen

- $\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$

- $\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$

Aber:

- $\forall x \exists y A(x, y) \not\equiv \exists y \forall x A(x, y)$

Quantoren vertauschen

- $\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$

- $\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$

Aber:

- $\forall x \exists y A(x, y) \not\equiv \exists y \forall x A(x, y)$

Beispiel

- jede Zahl hat einen Nachfolger $\neq$ es gibt eine Zahl, die ist von allen Zahlen der Nachfolger

Quantoren vertauschen

- $\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$

- $\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$

Aber:

- $\forall x \exists y A(x, y) \not\equiv \exists y \forall x A(x, y)$

Beispiel

- jede Zahl hat einen Nachfolger $\neq$ es gibt eine Zahl, die ist von allen Zahlen der Nachfolger

Quantoren und Kon-/Disjunktionen

- $(\forall x A(x)) \wedge (\forall x B(x)) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$

- $(\exists x A(x)) \vee (\exists x B(x)) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x))$

Aber:

- $(\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)) \not\equiv \forall x (A(x) \vee B(x))$

- $(\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x)) \not\equiv \exists x (A(x) \wedge B(x))$

Quantoren vertauschen

- $\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$

- $\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$

Aber:

- $\forall x \exists y A(x, y) \not\equiv \exists y \forall x A(x, y)$

Beispiel

- jede Zahl hat einen Nachfolger $\neq$ es gibt eine Zahl, die ist von allen Zahlen der Nachfolger

Quantoren und Kon-/Disjunktionen

- $(\forall x A(x)) \wedge (\forall x B(x)) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$

- $(\exists x A(x)) \vee (\exists x B(x)) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x))$

Aber:

- $(\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)) \not\equiv \forall x (A(x) \vee B(x))$

- $(\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x)) \not\equiv \exists x (A(x) \wedge B(x))$

Beispiel

- jeder Computer ist an oder aus $\neq$ jeder Computer ist an oder jeder Computer ist aus

Quantoren vertauschen

- $\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$

- $\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$

Aber:

- $\forall x \exists y A(x, y) \not\equiv \exists y \forall x A(x, y)$

Beispiel

- jede Zahl hat einen Nachfolger $\neq$ es gibt eine Zahl, die ist von allen Zahlen der Nachfolger

Quantoren und Kon-/Disjunktionen

- $(\forall x A(x)) \wedge (\forall x B(x)) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$

- $(\exists x A(x)) \vee (\exists x B(x)) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x))$

Aber:

- $(\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)) \not\equiv \forall x (A(x) \vee B(x))$

- $(\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x)) \not\equiv \exists x (A(x) \wedge B(x))$

Beispiel

- jeder Computer ist an oder aus $\neq$ jeder Computer ist an oder jeder Computer ist aus
- es gibt weiße und schwarze Schwäne $\neq$ es gibt einen Schwan, der weiß und schwarz ist