



openHPI
Einführung in die Mathematik der Algorithmik
– Graphen

Thomas Bläsius, Karen Seidel

Hasso-Plattner-Institut

Universität Potsdam

Die Situation

- Schneewittchen hat einen Kuchen gebacken
- als sie selbst ein Stück Kuchen möchte stellt sie fest: die Zwerge haben ihn schon vollständig aufgegessen

Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“

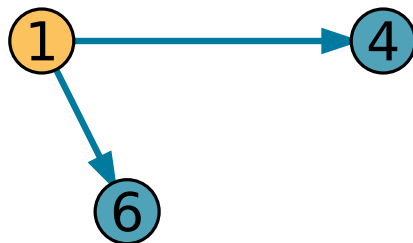
Welcher Zwerg lügt?

Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“

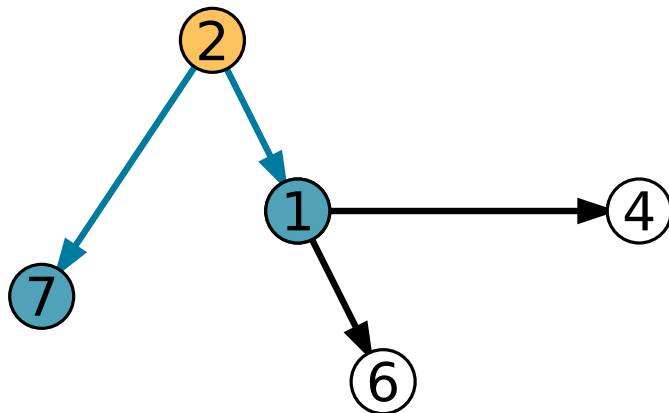
Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“



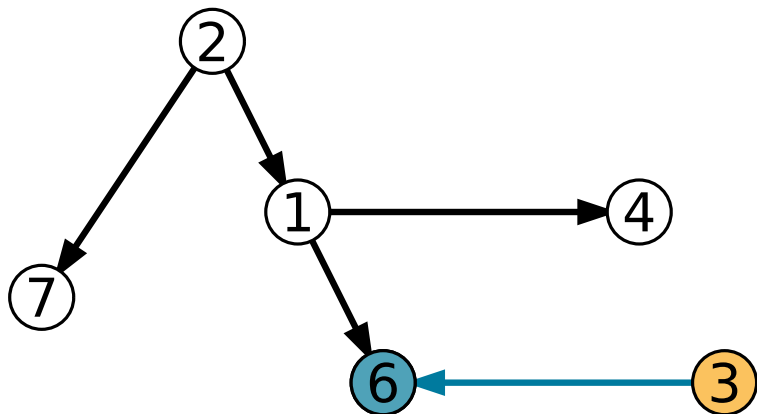
Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“



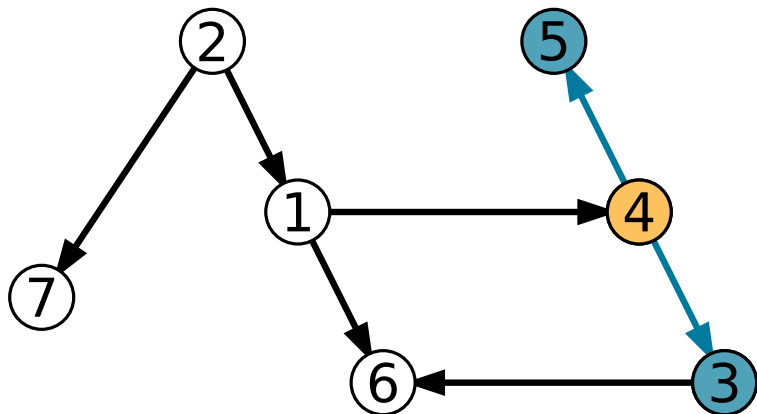
Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“



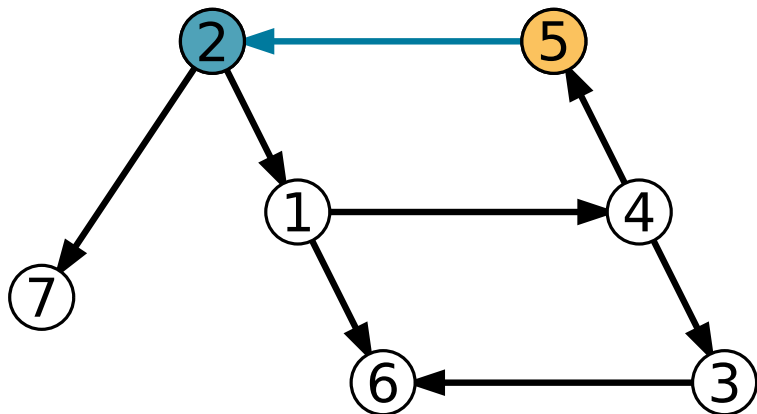
Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“



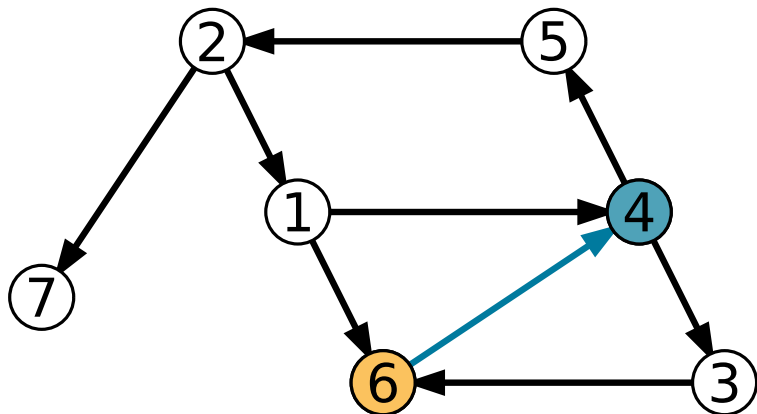
Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“



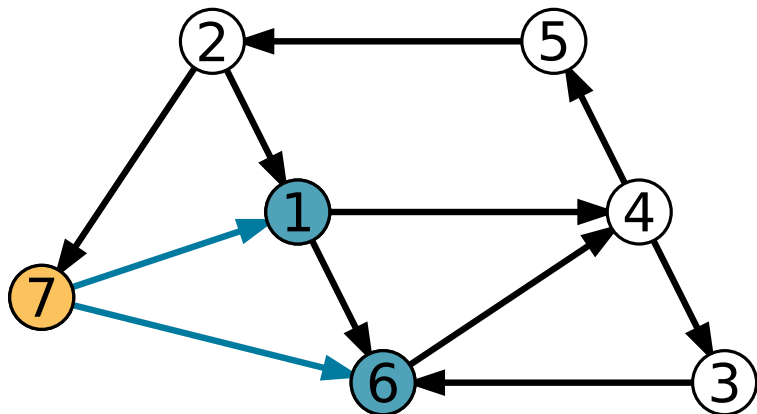
Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“



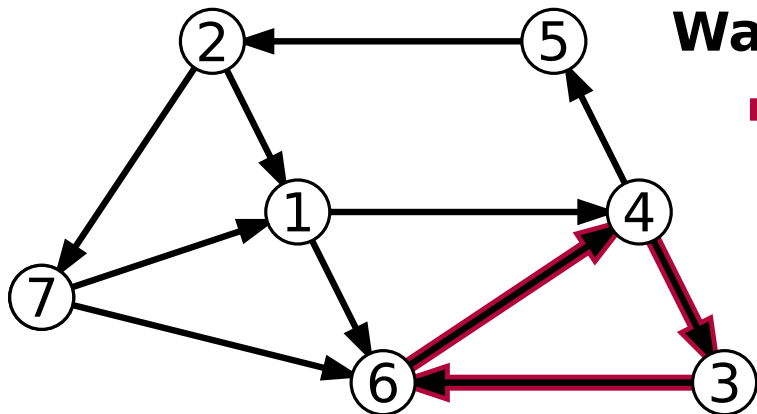
Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“



Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“

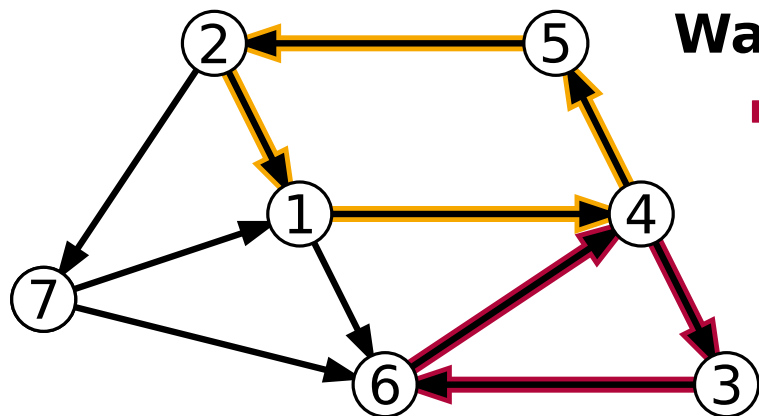


Was stimmt hier nicht?

- es sollte keine Kreise geben
- Zwerg 3, 4 oder 6 muss gelogen haben

Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“

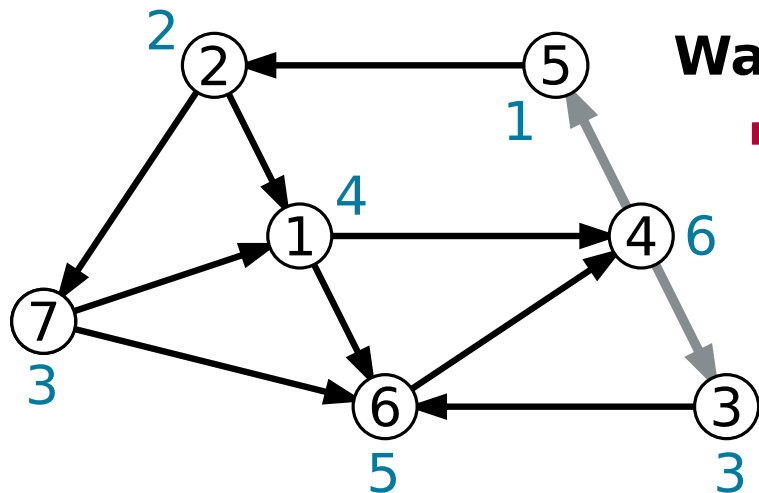


Was stimmt hier nicht?

- es sollte keine Kreise geben
- Zwerg 3, 4 oder 6 muss gelogen haben
- wenn nur einer lügt, dann ist es Zwerg 4

Die Ausreden der Zwerge

- Zwerg 1: „Die Zwerge 4 und 6 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 2: „Die Zwerge 1 und 7 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 3: „Zwerg 6 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 4: „Die Zwerge 3 und 5 haben mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 5: „Zwerg 2 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 6: „Zwerg 4 hat mehr gegessen als ich.“
- Zwerg 7: „Die Zwerge 1 und 6 haben mehr gegessen als ich.“



Was stimmt hier nicht?

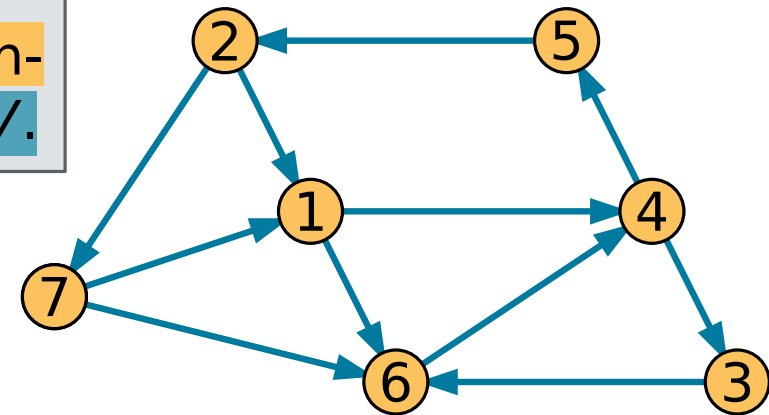
- es sollte keine Kreise geben
- Zwerg 3, 4 oder 6 muss gelogen haben
 - wenn nur einer lügt, dann ist es Zwerg 4
 - außerdem: ohne die Aussage von Zwerg 4 sind alle Aussagen konsistent

Definition

Ein **Graph** $G = (V, E)$ besteht aus einer Knotenmenge V , sowie einer Kantenmenge $E \subseteq V \times V$.

Das Beispiel mit den Zwergen

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $E = \{(1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 7), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (6, 4), (7, 1), (7, 6)\}$



Wozu eignen sich Graphen?

- repräsentiert eine binäre Relation (Kanten) zwischen Objekten (Knoten)
- Kanten können gerichtet sein (Zwerg x isst mehr als Zwerg y) oder ungerichtet (Zwerge x und y sind befreundet)
- viele algorithmische Probleme lassen sich mit Graphen modellieren

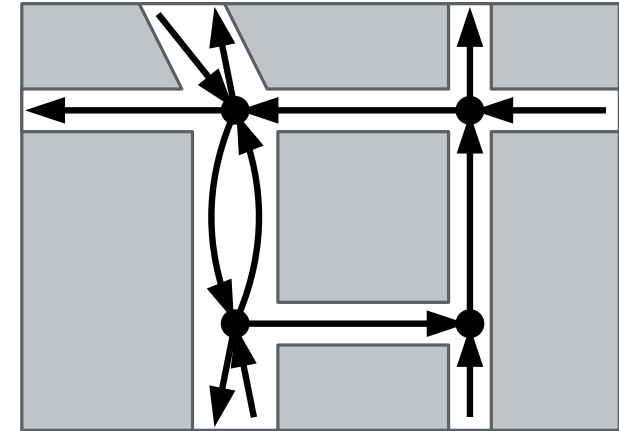
Problem

(unser erstes Graphenproblem)

Gegeben einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$, finde einen Knoten $v \in V$, sodass G azyklisch wird, wenn man v löscht.

Straßennetzwerk

- Knoten: Kreuzungen
- Kanten: Verbindungen zwischen Kreuzungen
- Kantengewichte: Fahrzeit
- mögliche Fragestellung: Was ist der schnellste Weg zwischen zwei Knoten?



Straßennetzwerk - Verfeinert

- nicht jede Art abzubiegen ist erlaubt
- ein Knoten pro Fahrspur an einer Kreuzung
- eine Kante für jede erlaubte Art abzubiegen
- ermöglicht Kosten für Abbiegemanöver

