



openHPI

Einführung in die Mathematik der Algorithmik

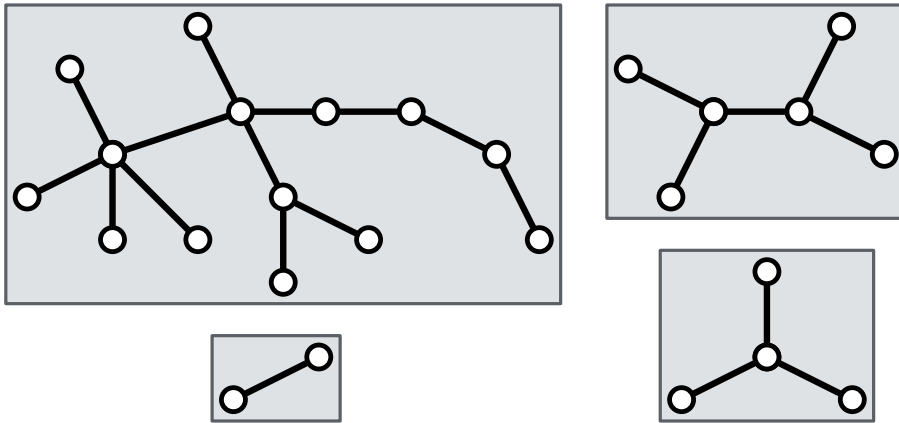
– Bäume

Thomas Bläsius, Timo Kötzing

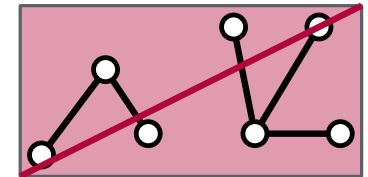
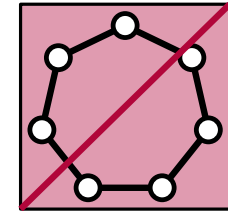
Hasso-Plattner-Institut

Universität Potsdam

Was haben diese Graphen gemeinsam?

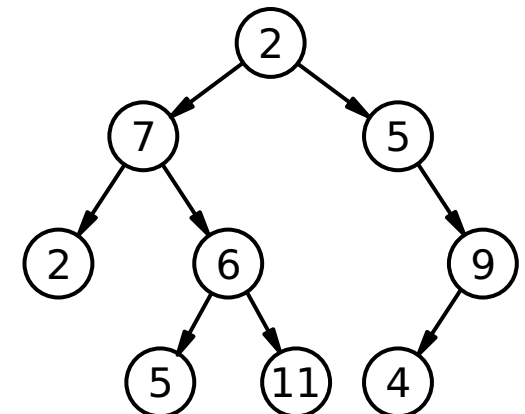
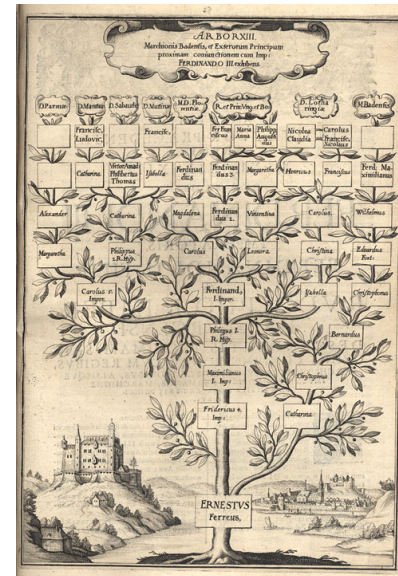
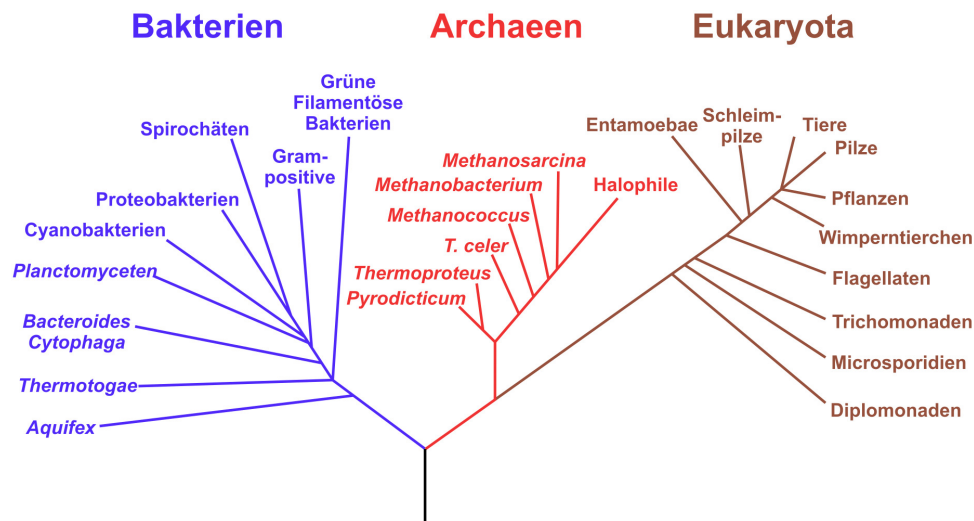


- sie enthalten keine Zyklen
- sie bestehen aus nur einer Komponente

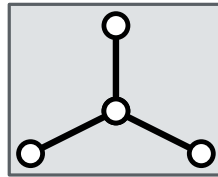
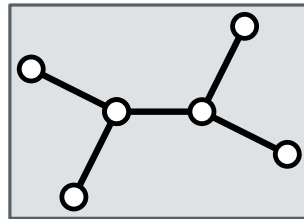
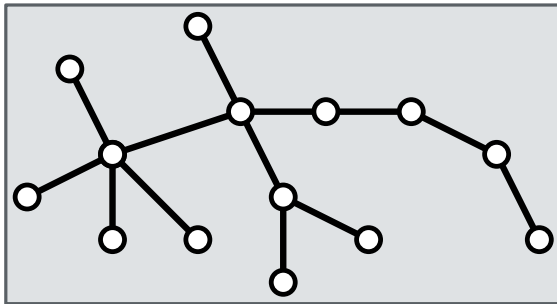


- solche Graphen heißen **Bäume**

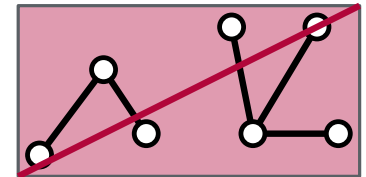
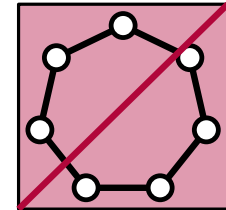
Beispiele: phylogenetische Bäume, Stammbäume, Datenstrukturen



Was haben diese Graphen gemeinsam?



- sie enthalten keine Zyklen
- sie bestehen aus nur einer Komponente

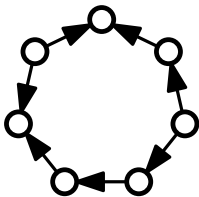


- solche Graphen heißen **Bäume**

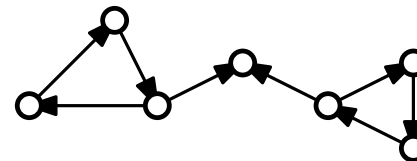
Darf's ein bisschen formaler sein?

- bisher: Intuitives Verständnis für „Zyklus“ und „Komponente“
- Intuition ist wichtig, kann aber auch zu Missverständnissen führen

Beispiel: gerichtete Graphen

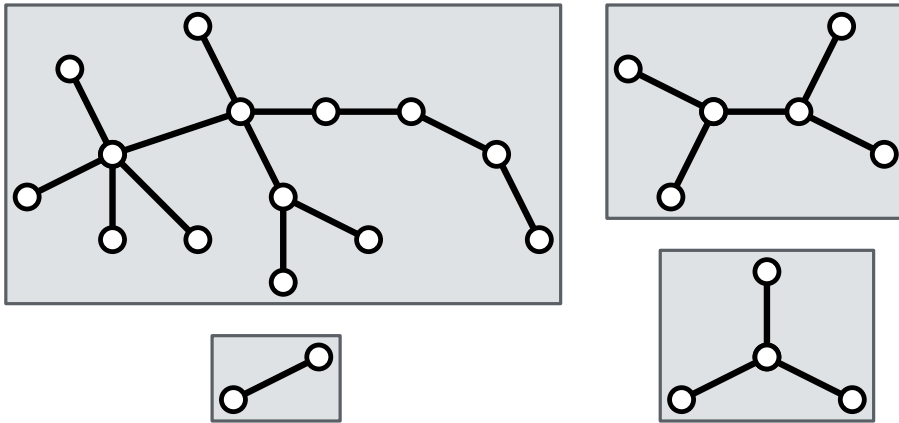


Ist das ein Zyklus?

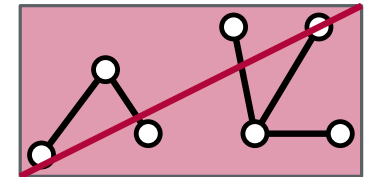
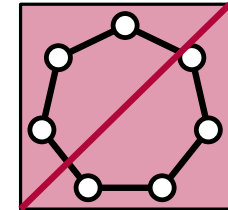


Wie viele Komponenten hat dieser Graph?

Was haben diese Graphen gemeinsam?



- sie enthalten keine Zyklen
- sie bestehen aus nur einer Komponente

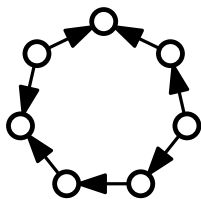


- solche Graphen heißen **Bäume**

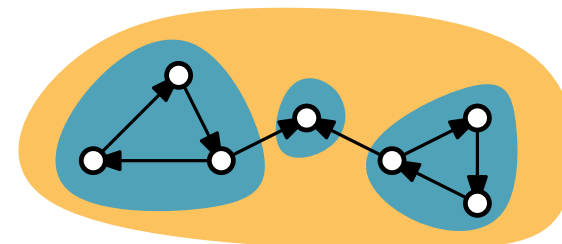
Darf's ein bisschen formaler sein?

- bisher: Intuitives Verständnis für „Zyklus“ und „Komponente“
- Intuition ist wichtig, kann aber auch zu Missverständnissen führen

Beispiel: gerichtete Graphen



Ist das ein Zyklus?

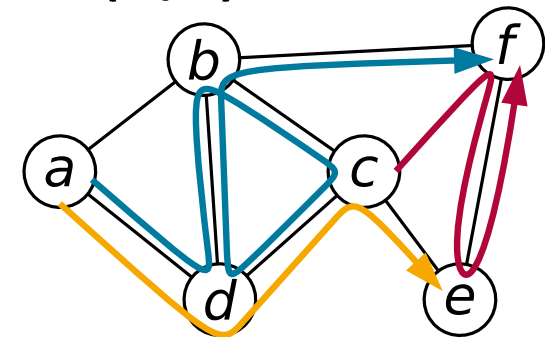


eine oder drei?

Wie viele Komponenten hat dieser Graph?

Wege & Pfade in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$

- betrachte eine Knotenfolge $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ mit $v_i \in V$
- $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ ist ein **Weg** von v_1 nach v_k , wenn $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
- ein Weg heißt **Pfad**, wenn kein Knoten mehrfach vorkommt
(man nennt sie auch einfache Wege/einfache Pfade)



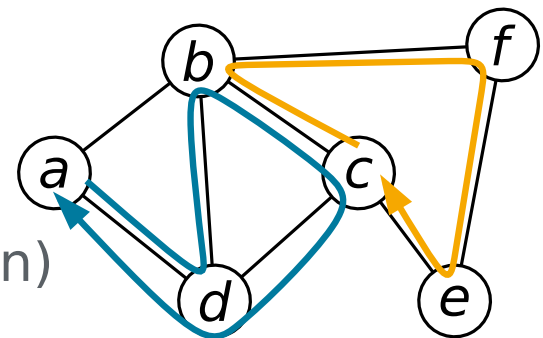
$\langle c, f, e, f \rangle$

ein Weg: $\langle a, d, b, c, d, b, f \rangle$

ein Pfad: $\langle a, d, c, e \rangle$

Zyklen & Kreise

- ein **Zyklus** ist ein Weg bei dem der erste und letzte Knoten übereinstimmen
- ein **Kreis** ist ein Zyklus (mit mindestens drei Knoten) bei dem sonst kein Knoten mehrfach vorkommt
(man nennt sie auch einfache Zyklen/einfache Kreise)

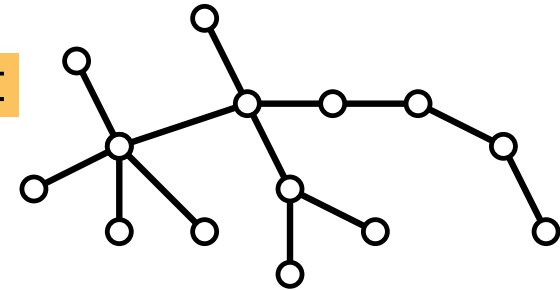


ein Zyklus: $\langle a, d, b, c, d, a \rangle$

ein Kreis: $\langle c, b, f, e, c \rangle$

Was genau ist ein Baum?

- $G = (V, E)$ ist **zusammenhängend**, wenn für je zwei Knoten $u, v \in V$ ein Weg von u nach v existiert
- G ist **azyklisch**, wenn G keinen Kreis enthält
- G ist ein **Baum**, wenn G azyklisch und zusammenhängend ist



„für je zwei“, „existiert“, „enthält nicht“ – Das klingt nach Quantoren!

Die Definitionen als Formel

$$\text{istBaum}(G) = \text{azykl}(G) \wedge \text{zush}(G)$$

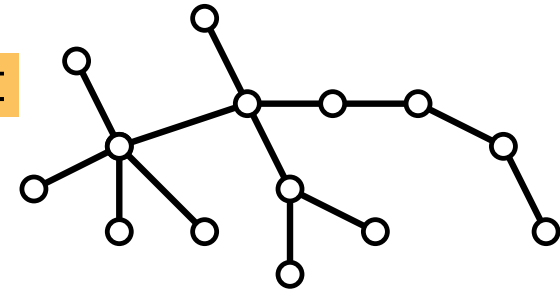
F : die Menge aller Knotenfolgen

$$\text{azykl}(G) = \neg \exists \langle v_1, \dots, v_k \rangle \in F \text{ istKreis}(\langle v_1, \dots, v_k \rangle)$$

$$\text{zush}(G) = \forall u, v \in V \exists \langle v_1, \dots, v_k \rangle \in F \text{ istWeg}(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) \wedge u = v_1 \wedge v = v_k$$

Was genau ist ein Baum?

- $G = (V, E)$ ist **zusammenhängend**, wenn für je zwei Knoten $u, v \in V$ ein Weg von u nach v existiert
- G ist **azyklisch**, wenn G keinen Kreis enthält
- G ist ein **Baum**, wenn G azyklisch und zusammenhängend ist



„für je zwei“, „existiert“, „enthält nicht“ – Das klingt nach Quantoren!

Die Definitionen als Formel

$$\text{istBaum}(G) = \text{azykl}(G) \wedge \text{zush}(G)$$

F : die Menge aller Knotenfolgen

$$\text{azykl}(G) = \neg \exists \langle v_1, \dots, v_k \rangle \in F \text{ istKreis}(\langle v_1, \dots, v_k \rangle)$$

$$\text{zush}(G) = \forall u, v \in V \exists \langle v_1, \dots, v_k \rangle \in F \text{ istWeg}(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) \wedge u = v_1 \wedge v = v_k$$

$$\text{istWeg}(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) = \forall i \in \{1, \dots, k-1\} \{v_i, v_{i+1}\} \in E$$

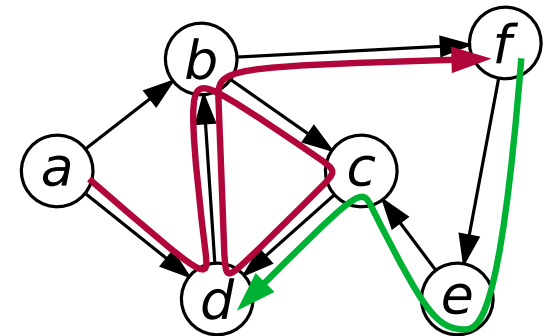
$$\text{istKreis}(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) = \underbrace{\text{istWeg}(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) \wedge (v_1 = v_k)}_{\text{ein Zyklus}} \wedge \underbrace{\forall i, j \in \{1, \dots, k-1\} (i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j)}_{\text{kein Knoten doppelt (außer } v_1 \text{ und } v_k)} \wedge k > 3$$

ein Zyklus

kein Knoten doppelt
(außer v_1 und v_k)

Wege in einem **gerichteten** Graphen $G = (V, E)$

- $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ ist ein **gerichteter Weg** von v_1 nach v_k , wenn $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
- **gerichtete Pfade**, **gerichtete Zyklen** und **gerichtete Kreise** sind genauso definiert wie zuvor
(nur mit gerichteten Wegen statt mit Wegen)

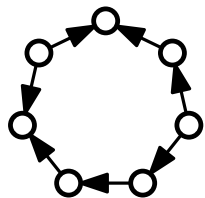


ger. Weg: $\langle a, d, b, c, d, b, f \rangle$

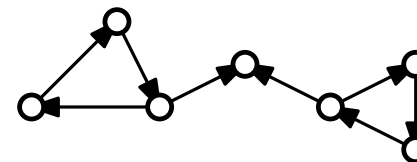
ger. Pfad: $\langle a, d, c, e \rangle$

Kreisfreiheit und Zusammenhang

- G ist **azyklisch**, wenn es keinen gerichteten Zyklus gibt
- G ist **stark zusammenhängend**, wenn für je zwei Knoten $u, v \in V$ ein gerichteter Weg von u nach v existiert



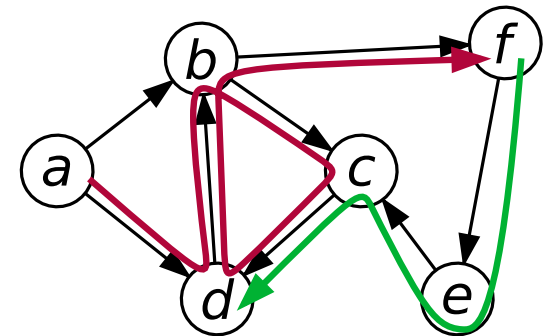
Ist dieser Graph azyklisch?



Wie viele Zusammenhangskomponenten hat dieser Graph?

Wege in einem **gerichteten** Graphen $G = (V, E)$

- $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ ist ein **gerichteter Weg** von v_1 nach v_k , wenn $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
- **gerichtete Pfade**, **gerichtete Zyklen** und **gerichtete Kreise** sind genauso definiert wie zuvor
(nur mit gerichteten Wegen statt mit Wegen)

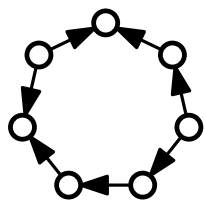


ger. Weg: $\langle a, d, b, c, d, b, f \rangle$

ger. Pfad: $\langle a, d, c, e \rangle$

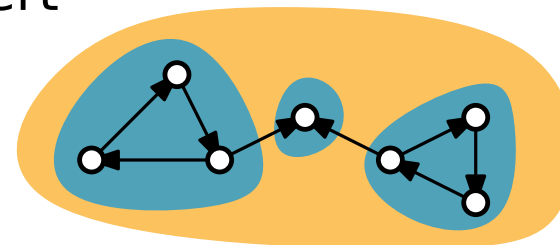
Kreisfreiheit und Zusammenhang

- G ist **azyklisch**, wenn es keinen gerichteten Zyklus gibt
- G ist **stark zusammenhängend**, wenn für je zwei Knoten $u, v \in V$ ein gerichteter Weg von u nach v existiert



Ist dieser Graph azyklisch?

ja!



Wie viele Zusammenhangskomponenten hat dieser Graph?

eine Zusammenhangskomponenten

drei starke Zusammenhangskomponenten