



openHPI
Einführung in die Mathematik der Algorithmik
– Färbung von Landkarten

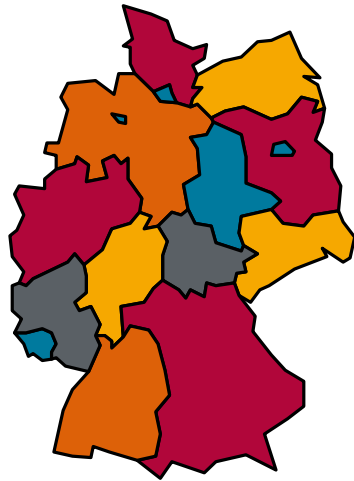
Thomas Bläsius, Timo Kötzing

Hasso-Plattner-Institut

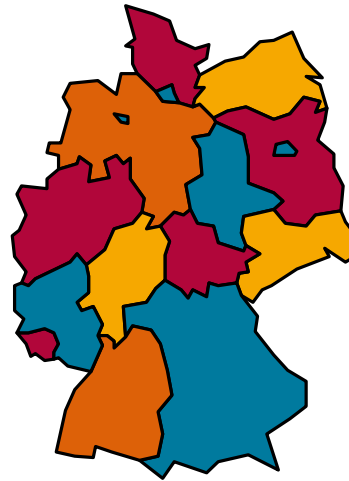
Universität Potsdam

Problem

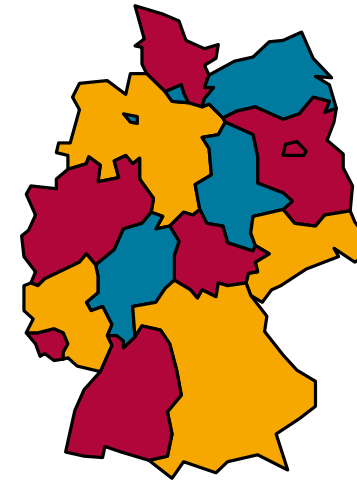
Färbe eine Landkarte, sodass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.



5 Farben



4 Farben



ungültige Färbung

Vier-Farben-Satz

Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

Beweis: super schwer

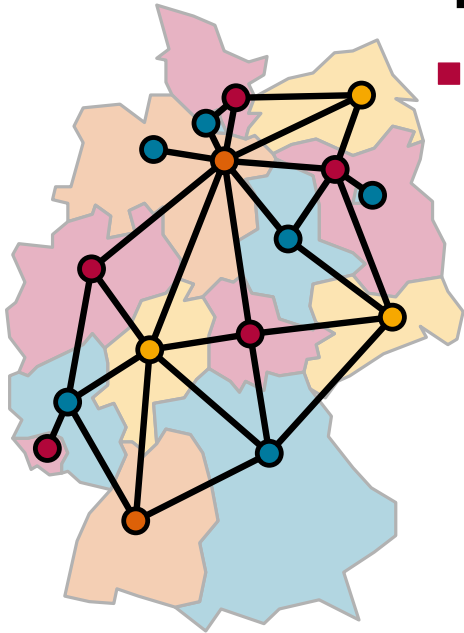
Heute: Färbung mit 6 Farben

Vier-Farben-Satz

~~Jede Landkarte~~ kann mit vier Farben gefärbt werden.

Jeder planare Graph

Was haben Graphen mit Landkarten zu tun?



- eine Landkarte modelliert als Graph
 - Länder sind Knoten
 - benachbarte Länder sind durch eine Kante verbunden

Problem einen Graphen

Färbe ~~eine Landkarte~~, sodass benachbarte ~~Länder~~ unterschiedliche Farben haben.

Knoten

Besondere Eigenschaft von Landkarten

- der Graph kann ohne Kantenkreuzungen gezeichnet werden
- solche Graphen nennt man **planare Graphen**

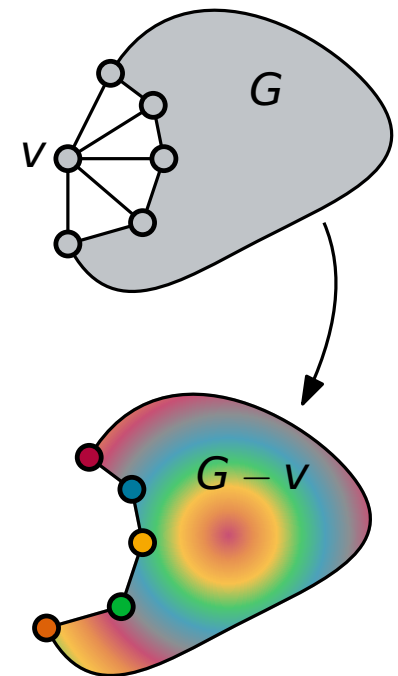


Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)

Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Beweis

- Annahme: es gibt planare Graphen, für die sechs Farben nicht genügen
- sei G der kleinste solche Graph
- wähle einen Knoten v mit maximal fünf Nachbarn in G
ohne Beweis: jeder planare Graph hat einen solchen Knoten
- G ohne v kann mit sechs Farben gefärbt werden
(denn G war ja das kleinste Gegenbeispiel)

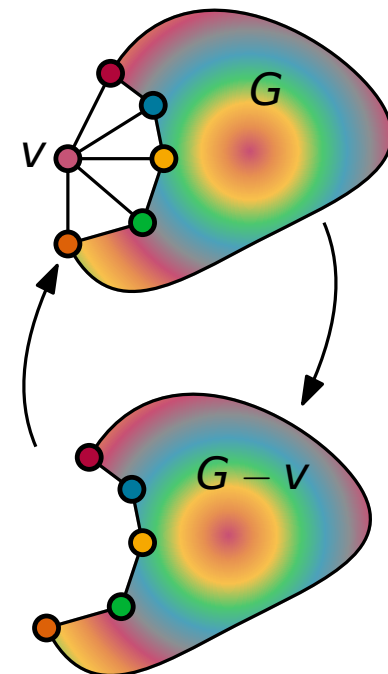


Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)

Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Beweis

- Annahme: es gibt planare Graphen, für die sechs Farben nicht genügen
- sei G der kleinste solche Graph
- wähle einen Knoten v mit maximal fünf Nachbarn in G
ohne Beweis: jeder planare Graph hat einen solchen Knoten
- G ohne v kann mit sechs Farben gefärbt werden
(denn G war ja das kleinste Gegenbeispiel)
- Nachbarn von v benutzen maximal fünf Farben
 $\Rightarrow v$ kann die sechste Farbe bekommen
- also: G ist doch mit sechs Farben färbbar



Widerspruch! $\Rightarrow$ es kann also kein Gegenbeispiel geben