



openHPI
Einführung in die Mathematik der Algorithmik
– Graphen & Matrizen

Thomas Bläsius, Karen Seidel

Hasso-Plattner-Institut

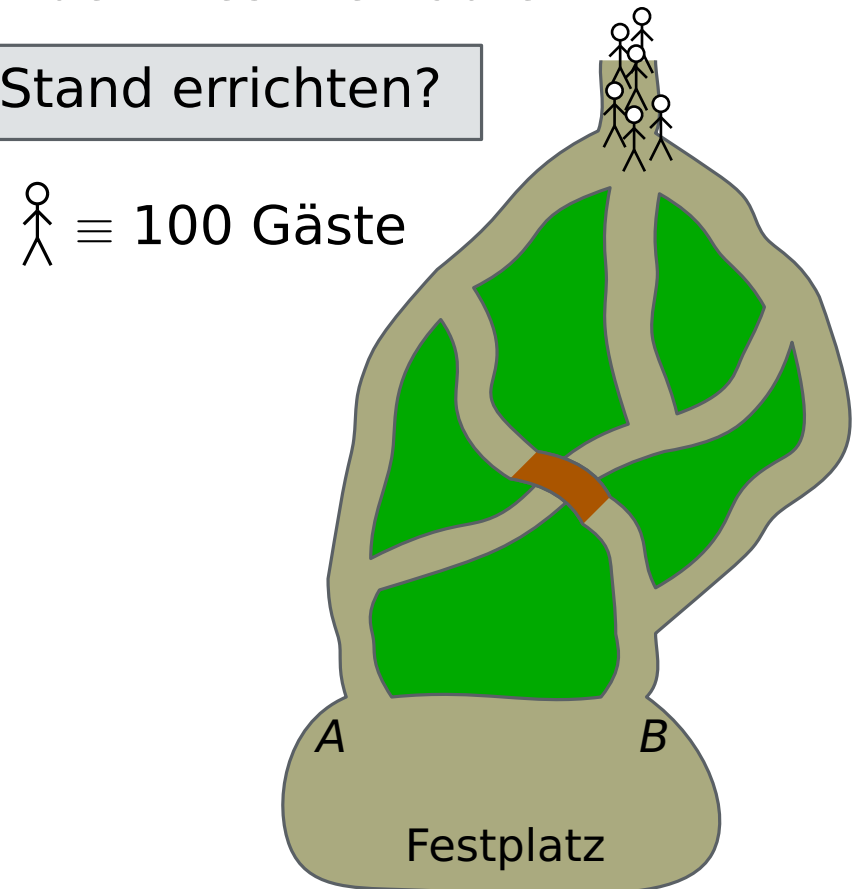
Universität Potsdam

Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste



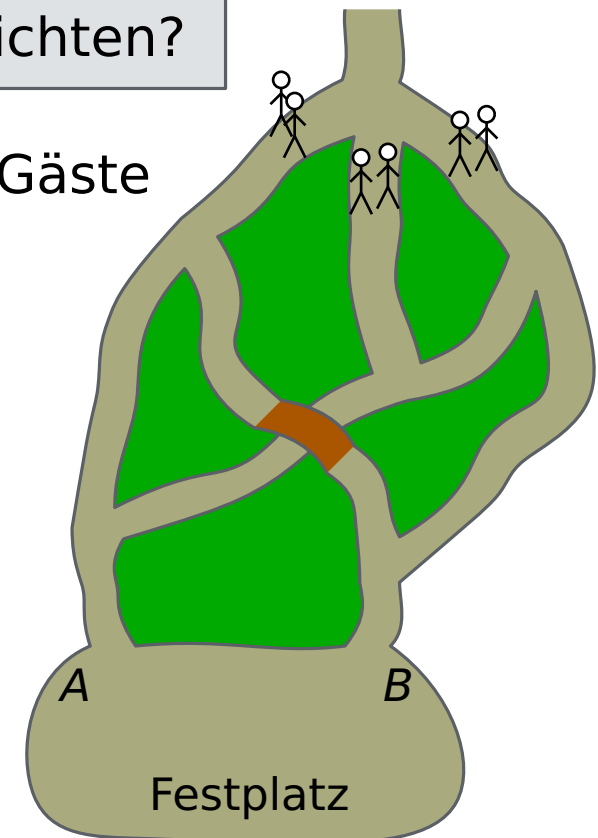
Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

 $\equiv$ 100 Gäste



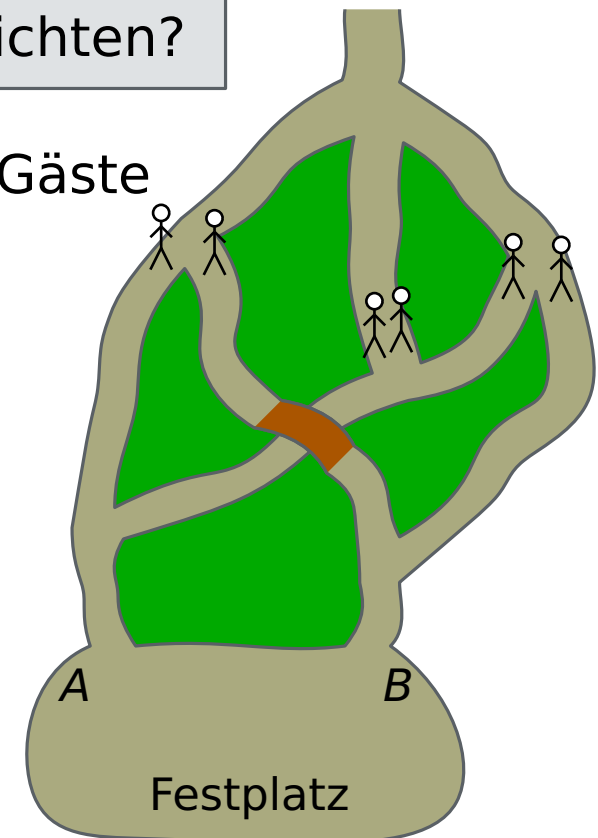
Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

 $\equiv$ 100 Gäste



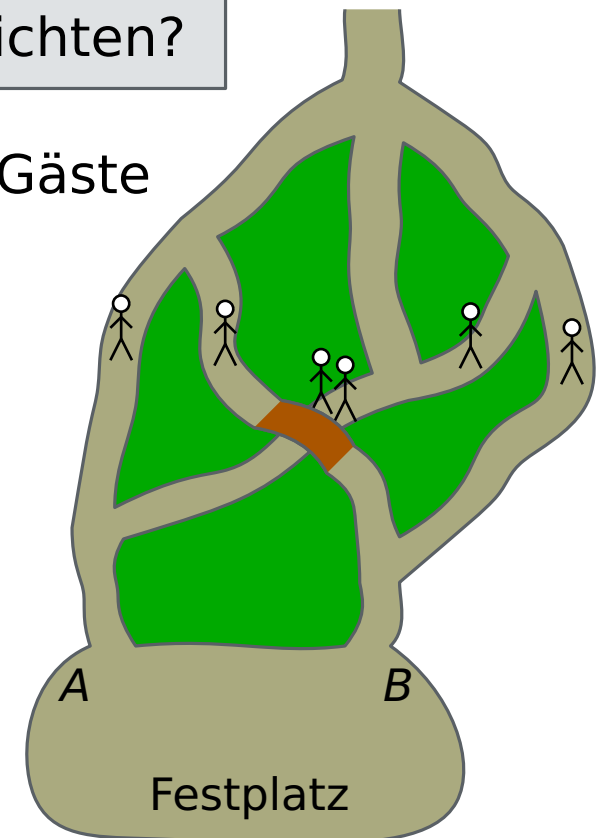
Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

 $\equiv$ 100 Gäste



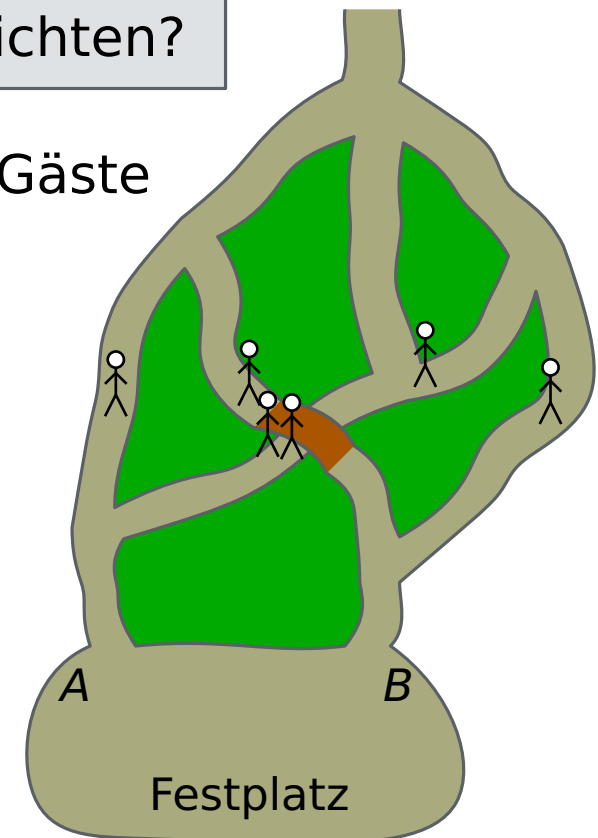
Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

 $\equiv$ 100 Gäste



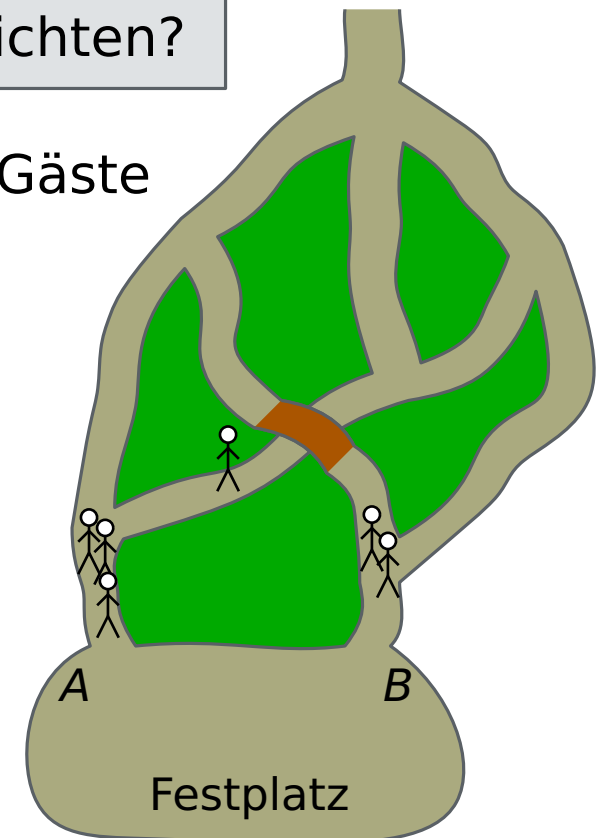
Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

 $\equiv$ 100 Gäste



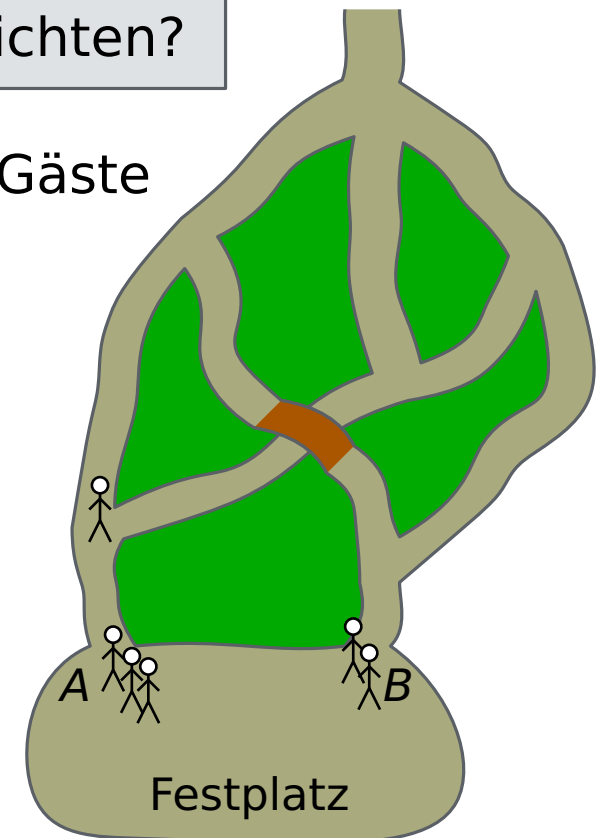
Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

 $\equiv$ 100 Gäste



Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

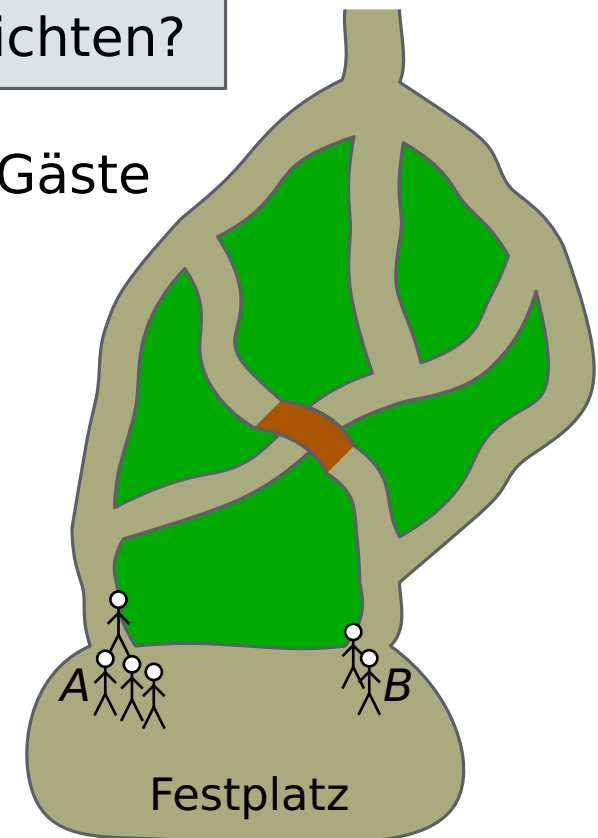
- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

- Eingang A ist deutlich vielversprechender

 $\equiv$ 100 Gäste



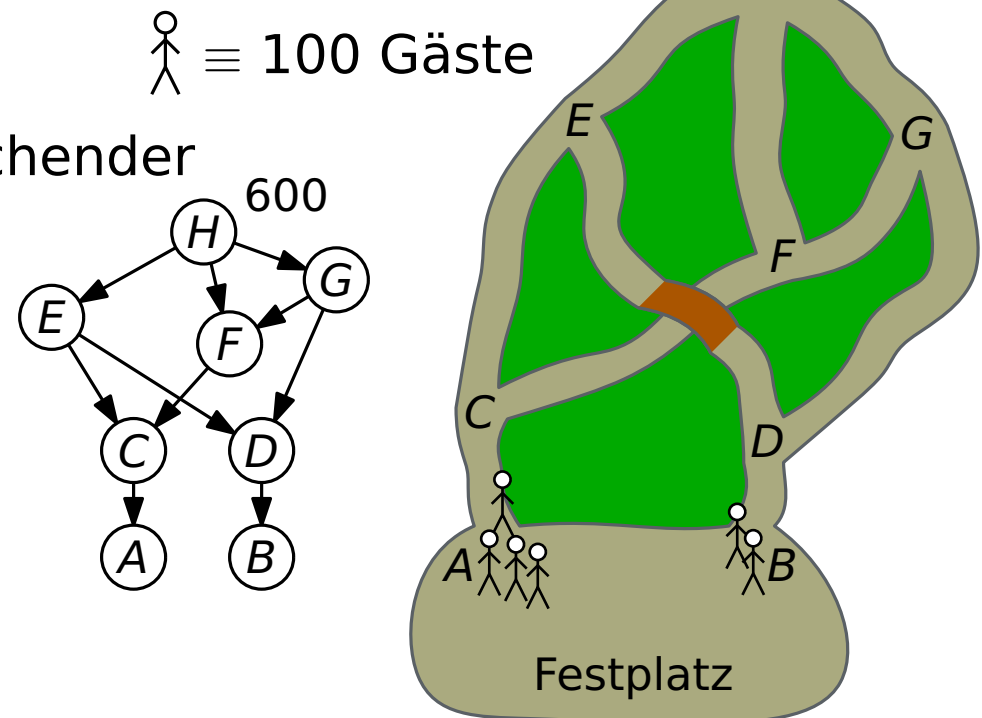
Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

- Eingang A ist deutlich vielversprechender
- mögliche Modellierung: als Graph



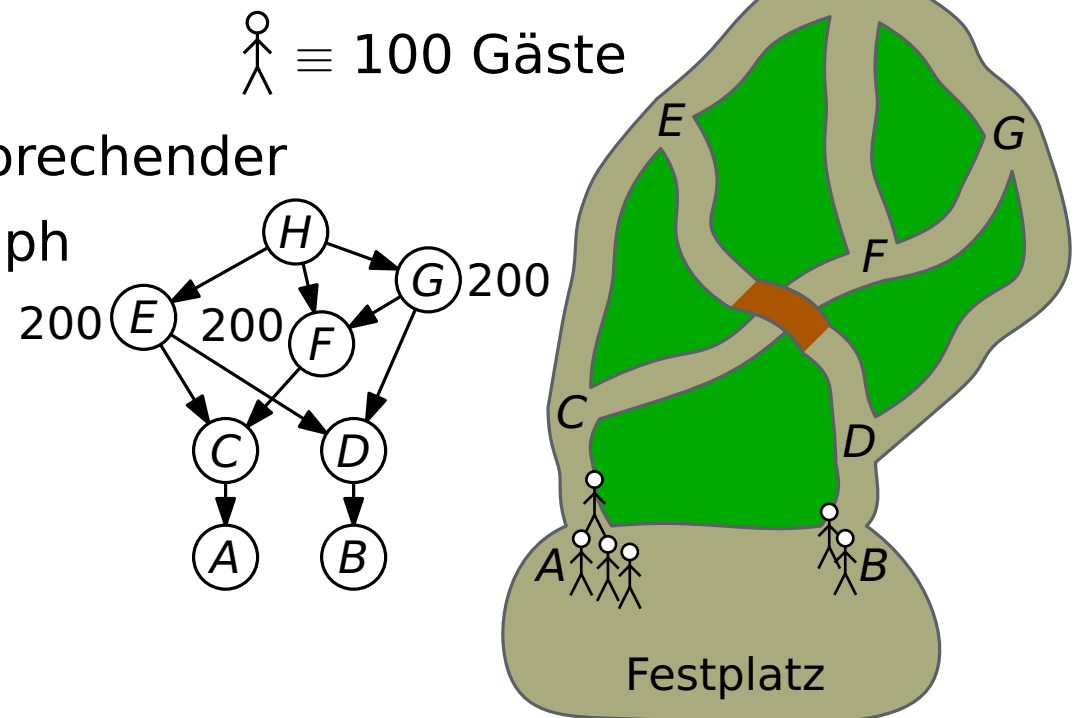
Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

- Eingang A ist deutlich vielversprechender
- mögliche Modellierung: als Graph



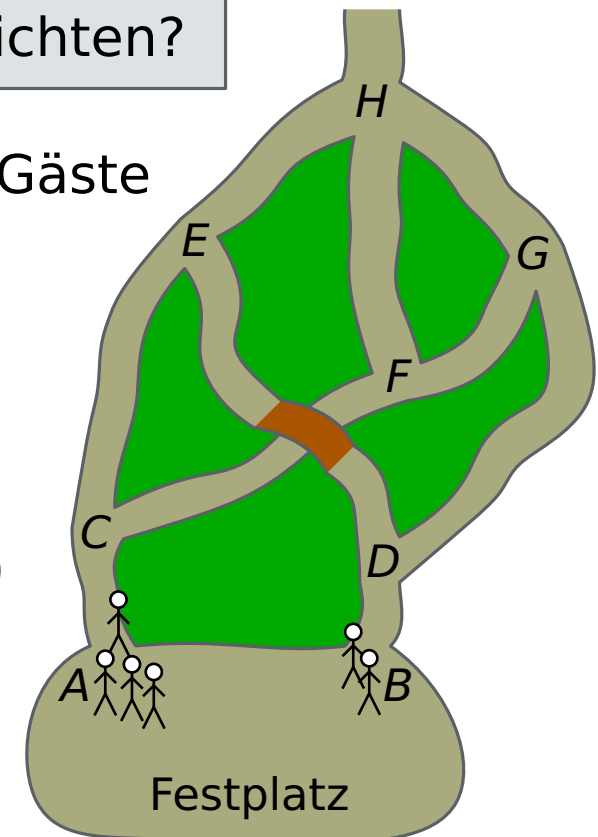
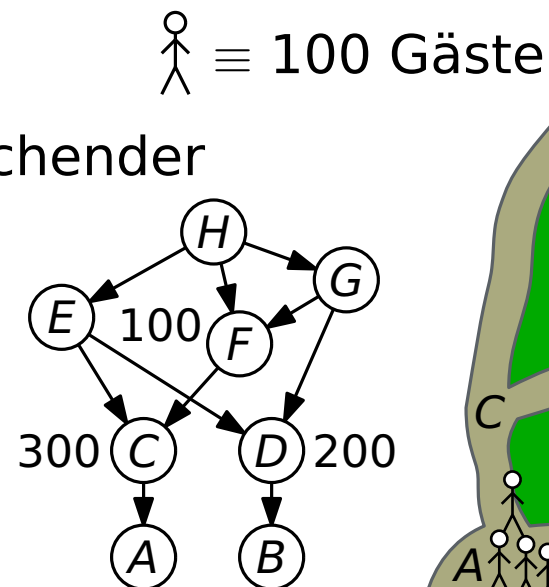
Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

- Eingang A ist deutlich vielversprechender
- mögliche Modellierung: als Graph



Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

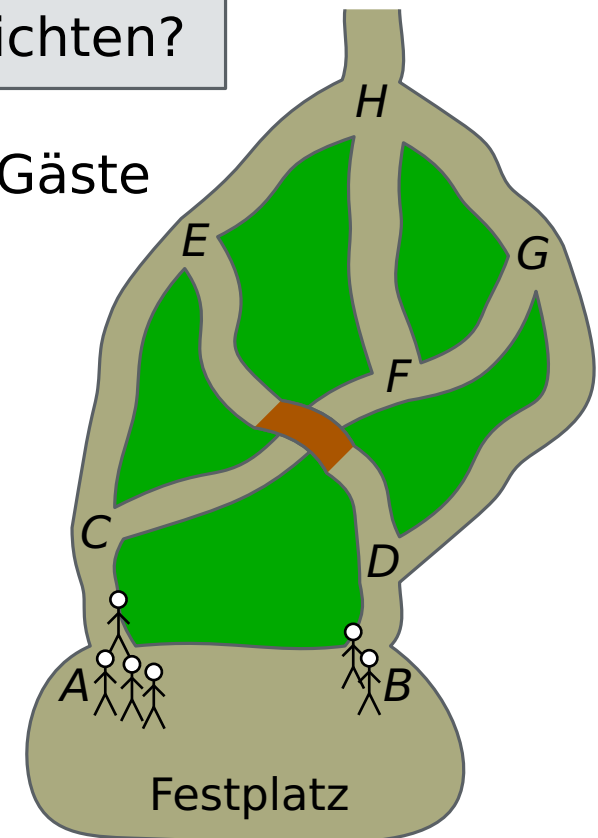
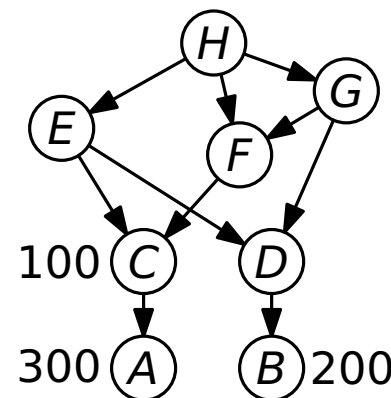
- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

- Eingang A ist deutlich vielversprechender
- mögliche Modellierung: als Graph

 $\equiv$ 100 Gäste



Ein Fest auf dem südlichen Festplatz

- es werden 600 Gäste (von Norden kommend) erwartet
- an Weggabelungen teilen sich die Besucher gleichmäßig auf
- Ben der Bäcker möchte sein Gebäck auf dem Fest verkaufen

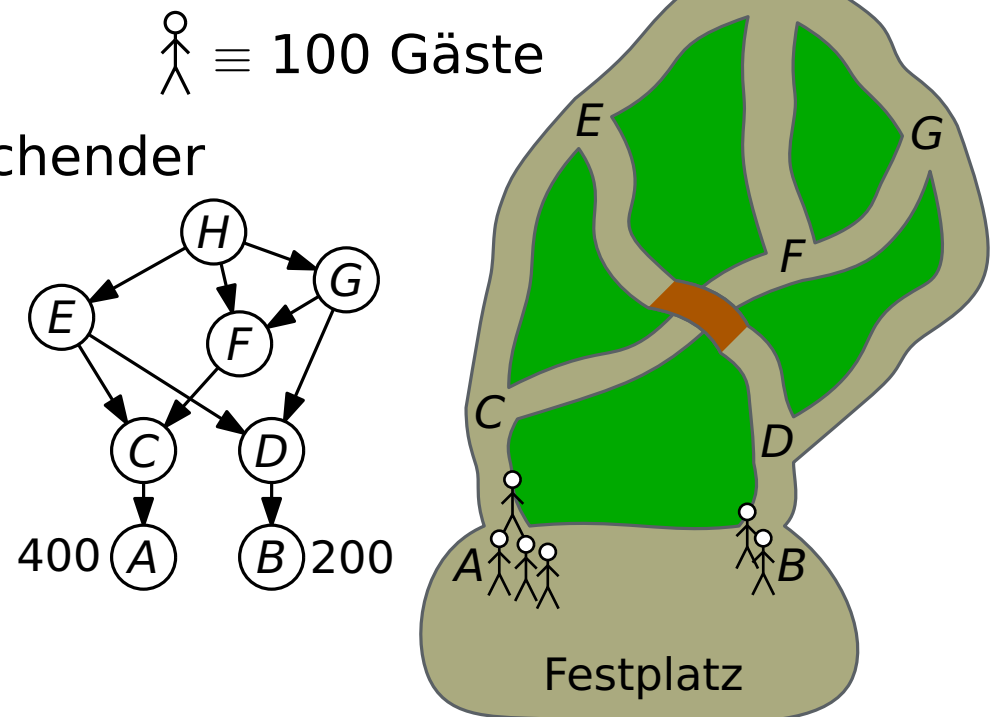
An welchem Eingang sollte Ben seinen Stand errichten?

Simuliere die 600 Gäste

- Eingang A ist deutlich vielversprechender
- mögliche Modellierung: als Graph

Ziel im Folgenden

- Simulation auf dem Graphen mittels Matrixmultiplikation
- aber zuerst: Was ist eine Matrixmultiplikation?



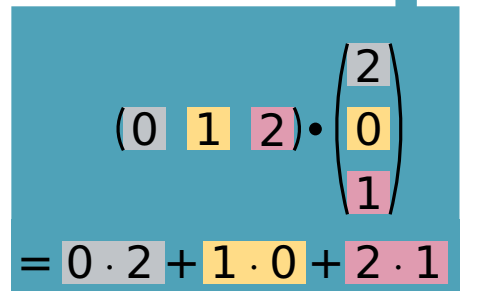
Ein Beispiel: multipliziere die Matrix A mit dem Vektor B

$$\begin{matrix} & A & & B \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Resultat: Zeilenvektor mit vier Einträgen
(ein Eintrag pro Zeile der Matrix)

Ein Beispiel: multipliziere die Matrix A mit dem Vektor B

$$\begin{matrix} A & B \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \end{matrix}$$


$$(0 \ 1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1$$

- Resultat: Zeilenvektor mit vier Einträgen
(ein Eintrag pro Zeile der Matrix)
- Berechnung des Eintrags i : multipliziere Zeile i von A mit dem Vektor B
 - multipliziere jeden Eintrag j der Zeile mit dem Eintrag j in B
 - addiere die resultierenden Zahlen

Ein Beispiel: multipliziere die Matrix A mit dem Vektor B

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculation for the first row:

$$(0 \ 1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

Calculation for the second row:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5$$

Calculation for the third row:

$$3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 8$$

Calculation for the fourth row:

$$2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 4$$

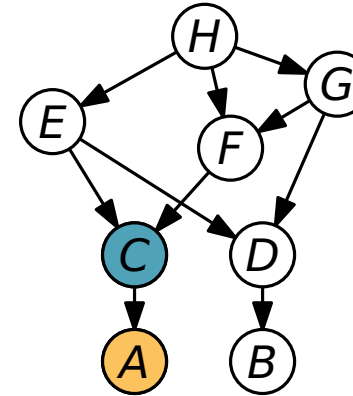
- Resultat: Zeilenvektor mit vier Einträgen
(ein Eintrag pro Zeile der Matrix)
- Berechnung des Eintrags i : multipliziere Zeile i von A mit dem Vektor B
 - multipliziere jeden Eintrag j der Zeile mit dem Eintrag j in B
 - addiere die resultierenden Zahlen

Allgemeine Berechnungsvorschrift

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} \cdot b_j$$

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

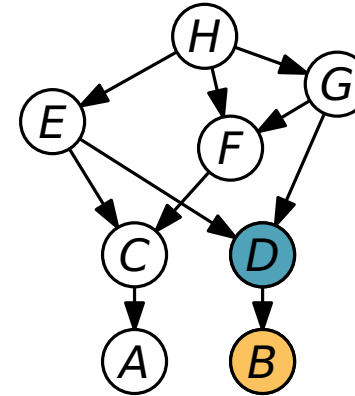
- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



	A	B	C	D	E	F	G	H
A			1					
B								
C								
D								
E								
F								
G								
H								

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

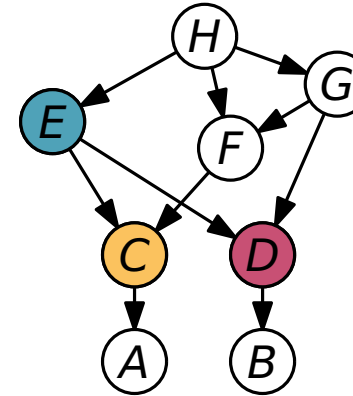
- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B				1				
C								
D								
E								
F								
G								
H								

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

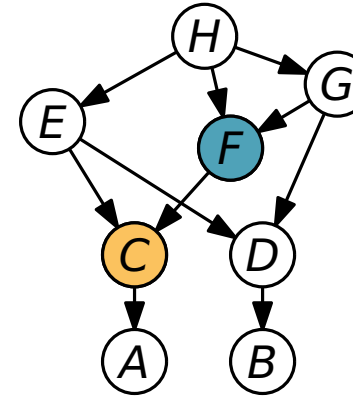
- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								
H								

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

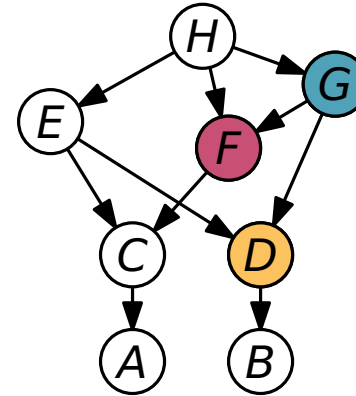
- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B								
C						1	1	
D					1			
E								
F								
G								
H								

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

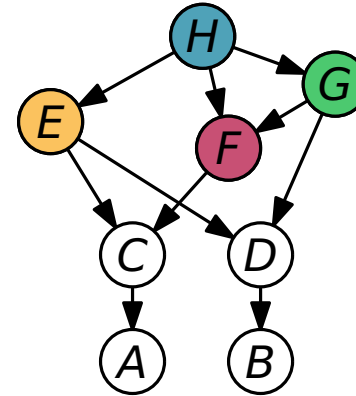
- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								
H								

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

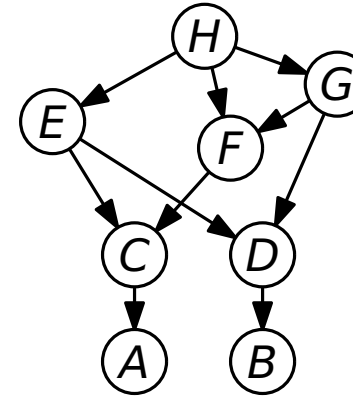
- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								
H								

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

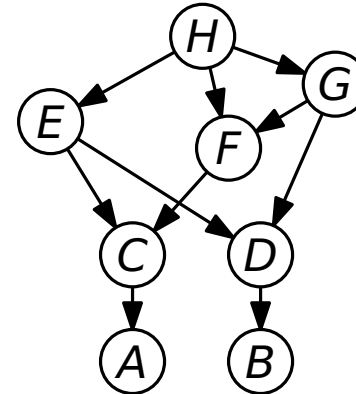
- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	0	1	0	0	0	0	0
B	0	0	0	1	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	0	0
D	0	0	0	0	1	0	1	0
E	0	0	0	0	0	0	0	1
F	0	0	0	0	0	0	1	1
G	0	0	0	0	0	0	0	1
H	0	0	0	0	0	0	0	0

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

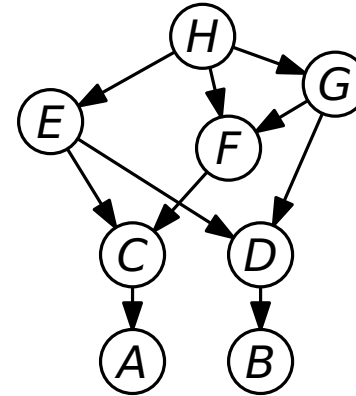
Modifizierte Adjazenzmatrix

- Interpretation der Spalte H : bei H stehende Personen verteilen sich Gleichmäßig auf E , F und G
- Modifikation 1: Teile jede Spalte durch ihre Anzahl 1en
- Personen bei A und B bleiben, wo sie sind

$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	0	1	0	0	0	0	0
B	0	0	0	1	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	0	0
D	0	0	0	0	1	0	1	0
E	0	0	0	0	0	0	0	1
F	0	0	0	0	0	0	1	1
G	0	0	0	0	0	0	0	1
H	0	0	0	0	0	0	0	0

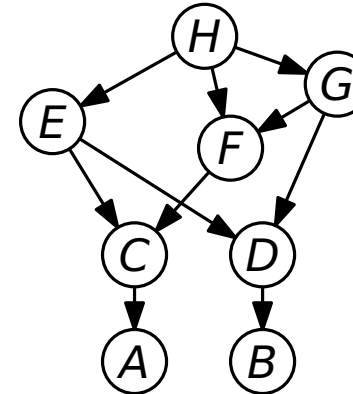
Modifizierte Adjazenzmatrix

- Interpretation der Spalte H : bei H stehende Personen verteilen sich Gleichmäßig auf E , F und G
- Modifikation 1: Teile jede Spalte durch ihre Anzahl 1en
- Personen bei A und B bleiben, wo sie sind
- Modifikation 2: setze Einträge (A, A) und (B, B) auf 1

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	0	1	0	0	0	0	0
B	0	1	0	1	0	0	0	0
C	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0
D	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
E	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
F	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
G	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
H	0	0	0	0	0	0	0	0

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Modifizierte Adjazenzmatrix

- Interpretation der Spalte H : bei H stehende Personen verteilen sich Gleichmäßig auf E , F und G
- Modifikation 1: Teile jede Spalte durch ihre Anzahl 1en
- Personen bei A und B bleiben, wo sie sind
- Modifikation 2: setze Einträge (A, A) und (B, B) auf 1

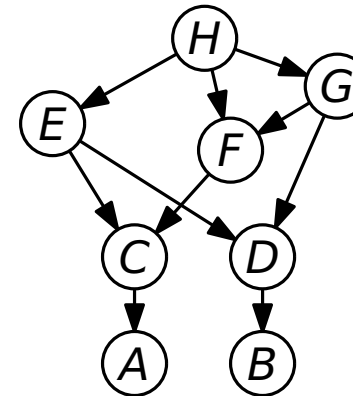
$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Simulation mittels Matrixmultiplikation

$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix}$$

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Modifizierte Adjazenzmatrix

- Interpretation der Spalte H : bei H stehende Personen verteilen sich Gleichmäßig auf E , F und G
- Modifikation 1: Teile jede Spalte durch ihre Anzahl 1en
- Personen bei A und B bleiben, wo sie sind
- Modifikation 2: setze Einträge (A, A) und (B, B) auf 1

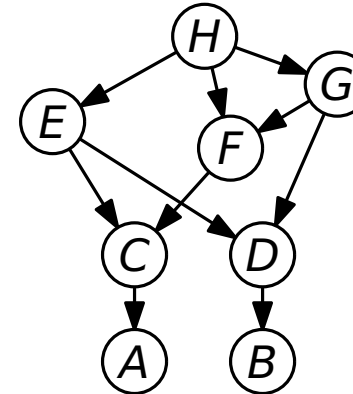
$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Simulation mittels Matrixmultiplikation

$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Modifizierte Adjazenzmatrix

- Interpretation der Spalte H : bei H stehende Personen verteilen sich Gleichmäßig auf E , F und G
- Modifikation 1: Teile jede Spalte durch ihre Anzahl 1en
- Personen bei A und B bleiben, wo sie sind
- Modifikation 2: setze Einträge (A, A) und (B, B) auf 1

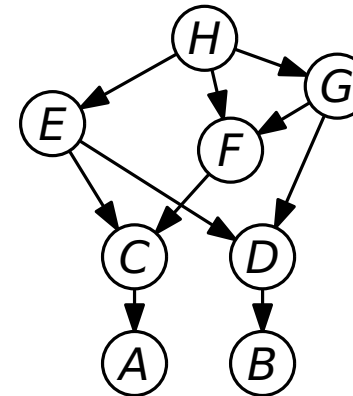
$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Simulation mittels Matrixmultiplikation

$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \\ 200 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix}$$

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Modifizierte Adjazenzmatrix

- Interpretation der Spalte H : bei H stehende Personen verteilen sich Gleichmäßig auf E , F und G
- Modifikation 1: Teile jede Spalte durch ihre Anzahl 1en
- Personen bei A und B bleiben, wo sie sind
- Modifikation 2: setze Einträge (A, A) und (B, B) auf 1

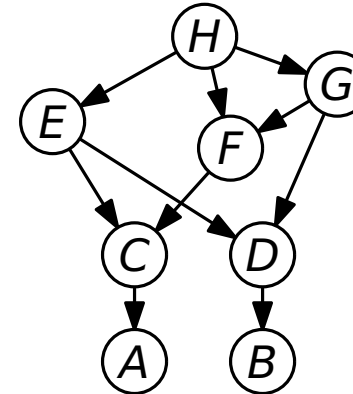
$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Simulation mittels Matrixmultiplikation

$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \\ 200 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix}$$

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

- je eine Zeile/Spalte für jeden Knoten
- Eintrag in Spalte X und Zeile Y : gibt an, ob es die Kante (X, Y) gibt



$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Modifizierte Adjazenzmatrix

- Interpretation der Spalte H : bei H stehende Personen verteilen sich Gleichmäßig auf E , F und G
- Modifikation 1: Teile jede Spalte durch ihre Anzahl 1en
- Personen bei A und B bleiben, wo sie sind
- Modifikation 2: setze Einträge (A, A) und (B, B) auf 1

$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Simulation mittels Matrixmultiplikation

$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix}$$