



openHPI

Einführung in die Mathematik der Algorithmik

– Übersicht Funktionen

Timo Kötzing, Karen Seidel

Hasso-Plattner-Institut

Universität Potsdam

- beschreiben einfachste **konstante**, **lineare**, **quadratische**, **kubische**, ... Zusammenhänge

- Beispiele:

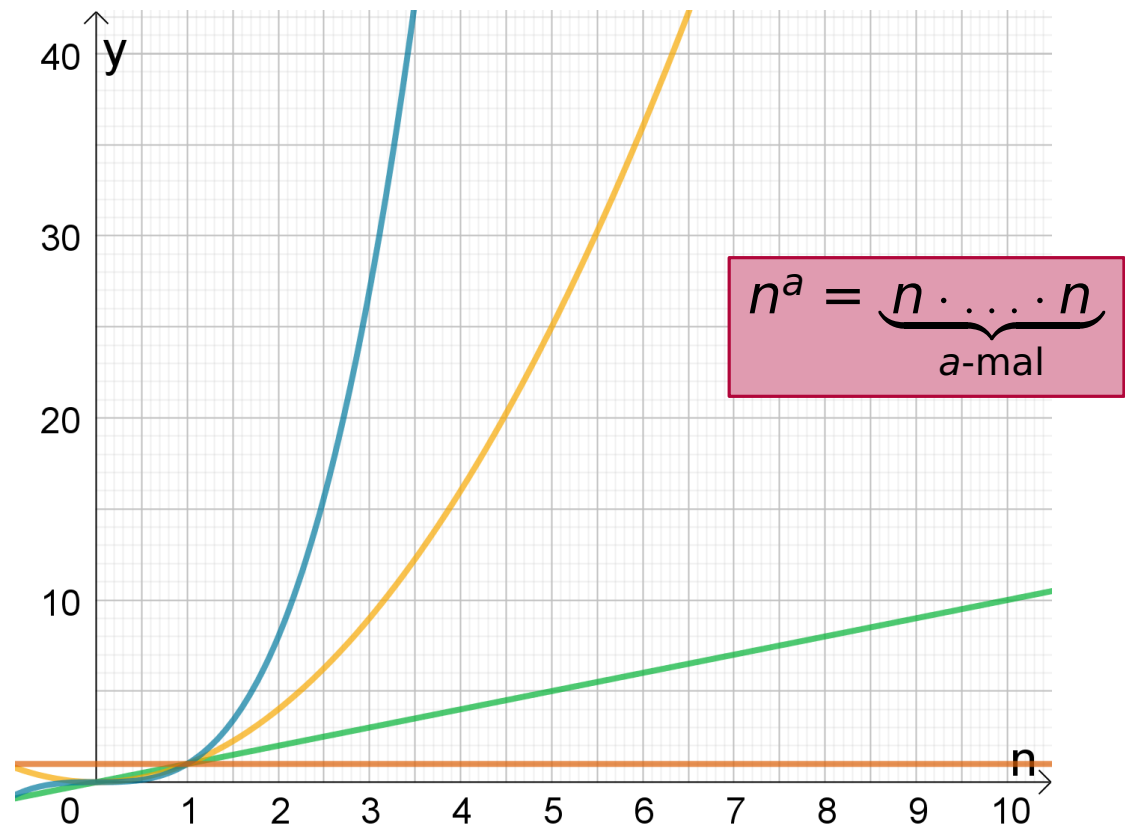
$$\text{pow}_0(n) = 1$$

$$\text{pow}_1(n) = n$$

$$\text{pow}_2(n) = n^2$$

$$\text{pow}_3(n) = n^3$$

n	0	1	2	3	10
n^0	1	1	1	1	1
n^1	0	1	2	3	10
n^2	0	1	4	9	100
n^3	0	1	8	27	1000



- durch Summen von Vielfachen der Potenzfunktionen lassen sich verschiedenste Vorgänge in Natur und Gesellschaft modellieren

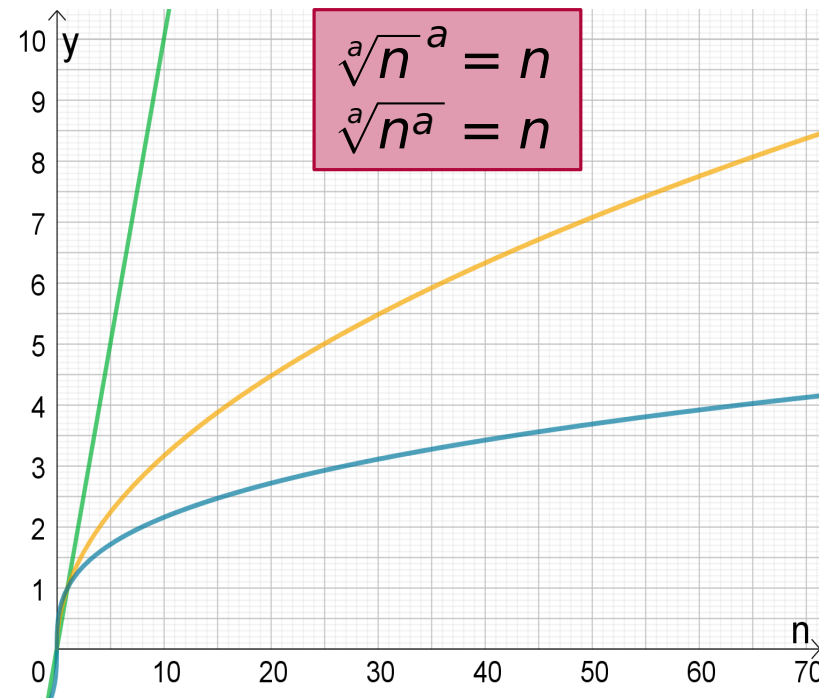
- beschreiben einfachste umgekehrt quadratische (Quadratwurzel), kubische (Kubikwurzel), ... Zusammenhänge
- Beispiele:

$$\text{sqrt}_2(n) = n^{1/2} = \sqrt{n}$$

$$\text{sqrt}_3(n) = n^{1/3} = \sqrt[3]{n}$$

n	0	1	4	9	100
$\sqrt{n}$	0	1	2	3	10

n	0	1	8	27	1000
$\sqrt[3]{n}$	0	1	2	3	10



- Wurzelfunktionen sind (verallgemeinerte) Potenzfunktionen und alle Rechenregeln gelten für ihre Funktionsterme gleichermaßen
- Vielfache von Wurzelfunktionen liefern Modelle für Abhängigkeiten zwischen physikalischen Größen

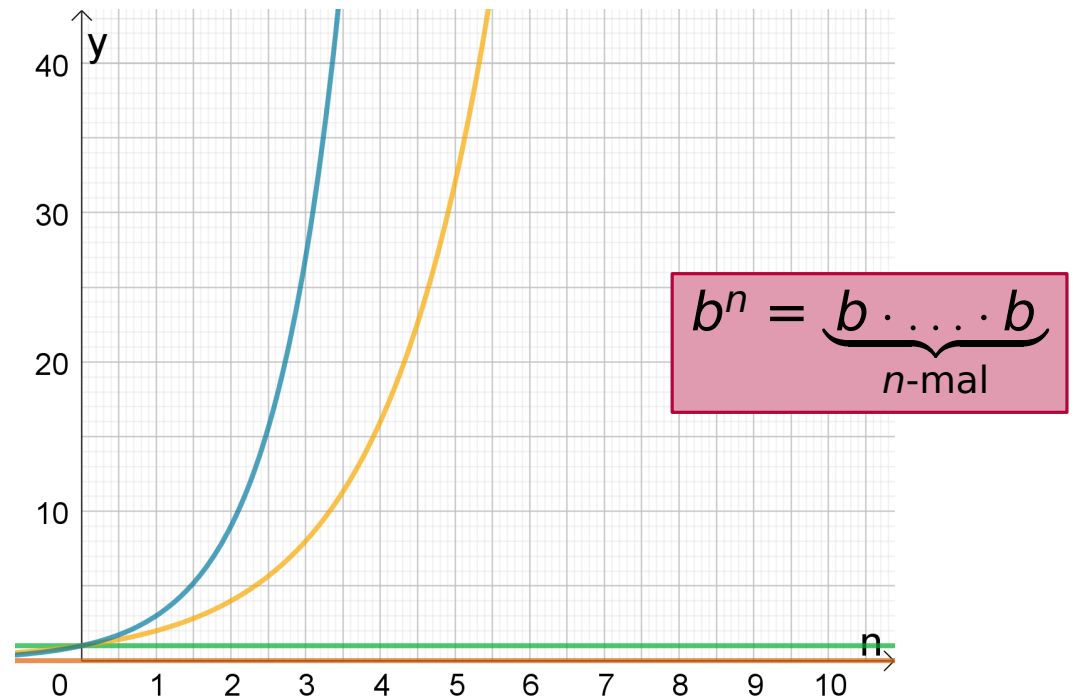
- beschreiben auf wiederholter Multiplikation mit der Basis b beruhende Zusammenhänge
- Beispiele:

$$\exp_1(n) = 1$$

$$\exp_2(n) = 2^n$$

$$\exp_3(n) = 3^n$$

n	0	1	2	3	10
2^n	1	2	4	8	1024
3^n	1	3	9	27	59049



- im Gegensatz zu Potenzfunktionen ist die Basis fixiert und der Exponent variabel
- Vielfache von Exponentialfunktionen modellieren zahlreiche Wachstums- und Zerfallsprozesse (in angemessenen Zeitintervallen)

- beschreiben Zusammenhänge, die auf Fragestellungen nach der Anzahl der Multiplikationen mit der Basis b beruhen

- Beispiele:

n	1	2	4	8	1024
$\log_2(n)$	0	1	2	3	10

n	1	3	9	27	59049
$\log_3(n)$	0	1	2	3	10

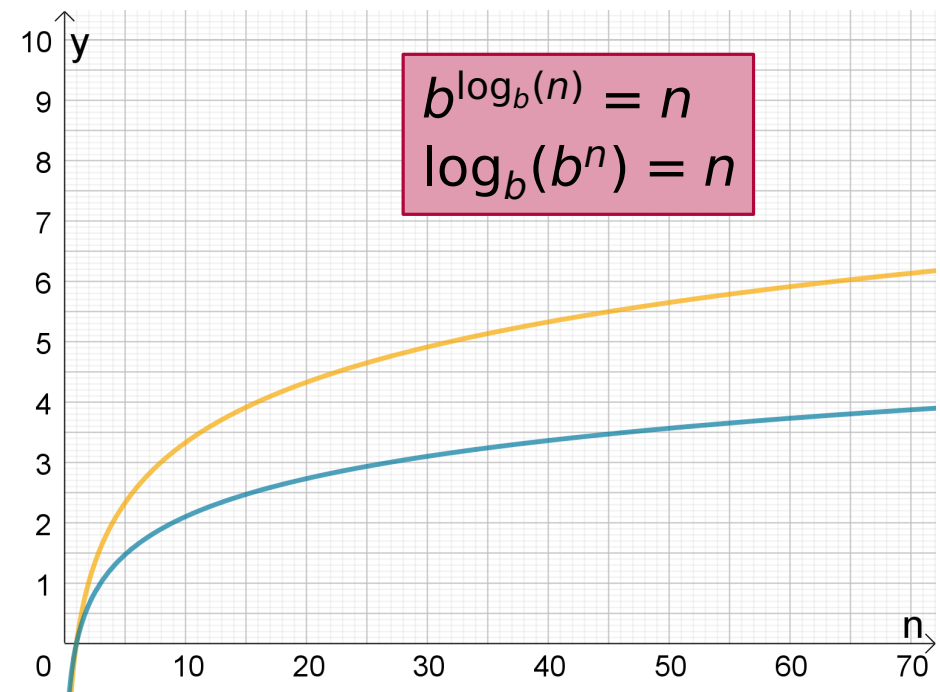
- Ausgewählte Eigenschaften:

$$\forall b > 1 \forall n \forall a \log_b(n^a) = a \cdot \log_b(n)$$

$$\text{Begründung: } b^{a \cdot \log_b(n)} = (b^{\log_b(n)})^a = n^a$$

$$\forall b_0, b_1 > 1 \forall n \log_{b_1}(n) = \log_{b_1}(b_0) \cdot \log_{b_0}(n)$$

$$\text{Begründung: } b_1^{\log_{b_1}(b_0) \cdot \log_{b_0}(n)} = \left(b_1^{\log_{b_1}(b_0)}\right)^{\log_{b_0}(n)} = b_0^{\log_{b_0}(n)} = n$$



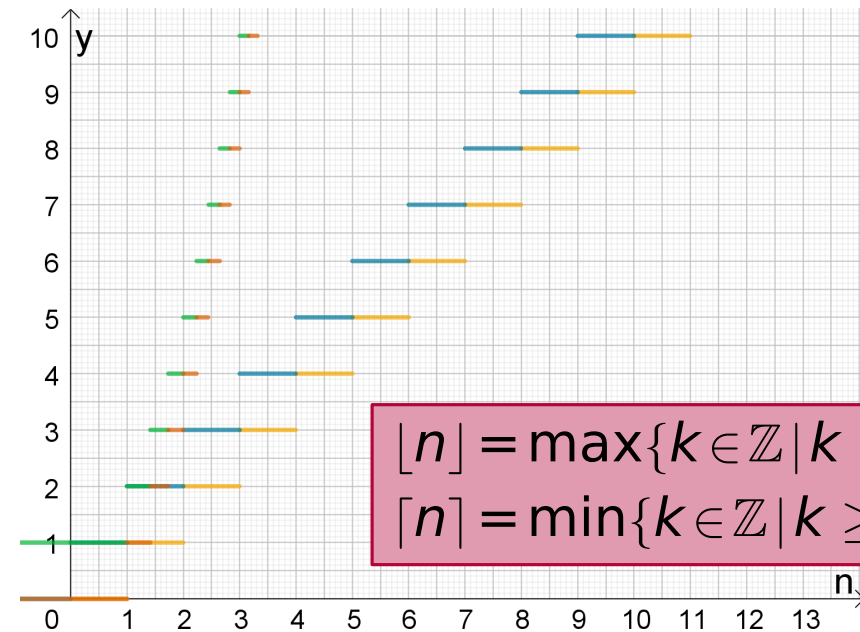
- zum **Abrunden** oder **Aufrunden** von Zwischenergebnissen
- Beispiele:

n	0	0,5	1	1,9	10,2
$\lfloor n \rfloor$	0	0	1	1	10

n	0	0,5	1	1,9	10,2
$\lceil n \rceil$	0	1	1	2	11

n	0	0,5	1	1,9	10,2
$\lfloor n^2 \rfloor$	0	0	1	3	104

n	0	0,5	1	1,9	10,2
$\lceil n^2 \rceil$	0	1	1	4	105



- Ausgewählte Eigenschaften:

$$\forall n \lfloor n \rfloor \leq n < \lfloor n \rfloor + 1$$

$$\forall n \lceil n \rceil = -\lfloor -n \rfloor$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = k$$