



openHPI

Einführung in die Mathematik der Algorithmik

– O-Notation

Thomas Bläsius, Timo Kötzing

Hasso-Plattner-Institut

Universität Potsdam

Erinnerung

- $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c \exists n_0 \forall n > n_0 f(n) \leq c \cdot g(n)$
- Interpretation: $f(n)$ wächst asymptotisch maximal so schnell wie $g(n)$
(wenn der Rechner für $f(n)$ schnell genug und n groß genug ist, dann ist $f(n)$ kleiner als $g(n)$)

Problem

- diese Definition für jedes Funktionenpaar explizit zu prüfen ist mühsam
- Ziel: entwickle ein paar einfache „Rechenregeln“

Konstante Faktoren

$$a \cdot h(n) \in O(h(n))$$

Monome

$$a \leq b \Rightarrow n^a \in O(n^b)$$

Transitivität

$$f_1(n) \in O(f_2(n)) \wedge f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow f_1(n) \in O(f_3(n))$$

Summen

$$f_1(n) \in O(f_3(n)) \wedge f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \in O(f_3(n))$$

Erinnerung

- $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c \exists n_0 \forall n > n_0 f(n) \leq c \cdot g(n)$
- Interpretation: $f(n)$ wächst asymptotisch maximal so schnell wie $g(n)$
(wenn der Rechner für $f(n)$ schnell genug und n groß genug ist, dann ist $f(n)$ kleiner als $g(n)$)

Konstante Faktoren

$$a \cdot h(n) \in O(h(n))$$

Beweis

$$\underbrace{f(n)}_{a \cdot h(n)} \in O(\underbrace{g(n)}_{h(n)}) \Leftrightarrow \exists c \exists n_0 \forall n > n_0 \underbrace{f(n)}_{a \cdot h(n)} \leq \underbrace{c \cdot g(n)}_{c \cdot h(n)}$$

setze $c = a$

Monome

$$a \leq b \Rightarrow n^a \in O(n^b)$$

Beweis

- für $n \geq 1$ gilt: $n^a \leq n^b$
- es folgt: $\exists c \exists n_0 \forall n > n_0 n^a \leq c \cdot n^b \Rightarrow n^a \in O(n^b)$
setze $c = 1$ setze $n_0 = 1$

Erinnerung

- $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c \exists n_0 \forall n > n_0 f(n) \leq c \cdot g(n)$
- Interpretation: $f(n)$ wächst asymptotisch maximal so schnell wie $g(n)$
(wenn der Rechner für $f(n)$ schnell genug und n groß genug ist, dann ist $f(n)$ kleiner als $g(n)$)

Transitivität

$$f_1(n) \in O(f_2(n)) \wedge f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow f_1(n) \in O(f_3(n))$$

Beweis

- wir wissen:
 $f_1(n) \in O(f_2(n)) \Rightarrow \exists \hat{c} \exists \hat{n}_0 \forall n > \hat{n}_0 f_1(n) \leq \hat{c} \cdot f_2(n)$
 $f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow \exists \bar{c} \exists \bar{n}_0 \forall n > \bar{n}_0 f_2(n) \leq \bar{c} \cdot f_3(n)$
- halte $\hat{c}$, $\hat{c}_0$, $\bar{c}$ und $\bar{c}_0$ fest; dann folgt:
$$\forall n > \max\{\hat{n}_0, \bar{n}_0\} f_1(n) \leq \hat{c} \cdot f_2(n) \wedge f_2(n) \leq \bar{c} \cdot f_3(n)$$
$$\Rightarrow \forall n > \max\{\hat{n}_0, \bar{n}_0\} f_1(n) \leq \hat{c} \cdot f_2(n) \leq \hat{c} \cdot \bar{c} \cdot f_3(n)$$
$$\Rightarrow \exists c \exists n_0 \forall n > n_0 f_1(n) \leq c \cdot f_3(n) \Rightarrow f_1(n) \in O(f_3(n))$$

$\hat{c} \cdot \bar{c}$ $\max\{\hat{n}_0, \bar{n}_0\}$

Erinnerung

- $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c \exists n_0 \forall n > n_0 f(n) \leq c \cdot g(n)$
- Interpretation: $f(n)$ wächst asymptotisch maximal so schnell wie $g(n)$
(wenn der Rechner für $f(n)$ schnell genug und n groß genug ist, dann ist $f(n)$ kleiner als $g(n)$)

Summen

$$f_1(n) \in O(f_3(n)) \wedge f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \in O(f_3(n))$$

Beweis

- wir wissen:

$$f_1(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow \exists \hat{c} \exists \hat{n}_0 \forall n > \hat{n}_0 f_1(n) \leq \hat{c} \cdot f_3(n)$$

$$f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow \exists \bar{c} \exists \bar{n}_0 \forall n > \bar{n}_0 f_2(n) \leq \bar{c} \cdot f_3(n)$$

- halte $\hat{c}$, $\hat{n}_0$, $\bar{c}$ und $\bar{n}_0$ fest; dann folgt:

$$\forall n > \max\{\hat{n}_0, \bar{n}_0\} f_1(n) \leq \hat{c} \cdot f_3(n) \wedge f_2(n) \leq \bar{c} \cdot f_3(n)$$

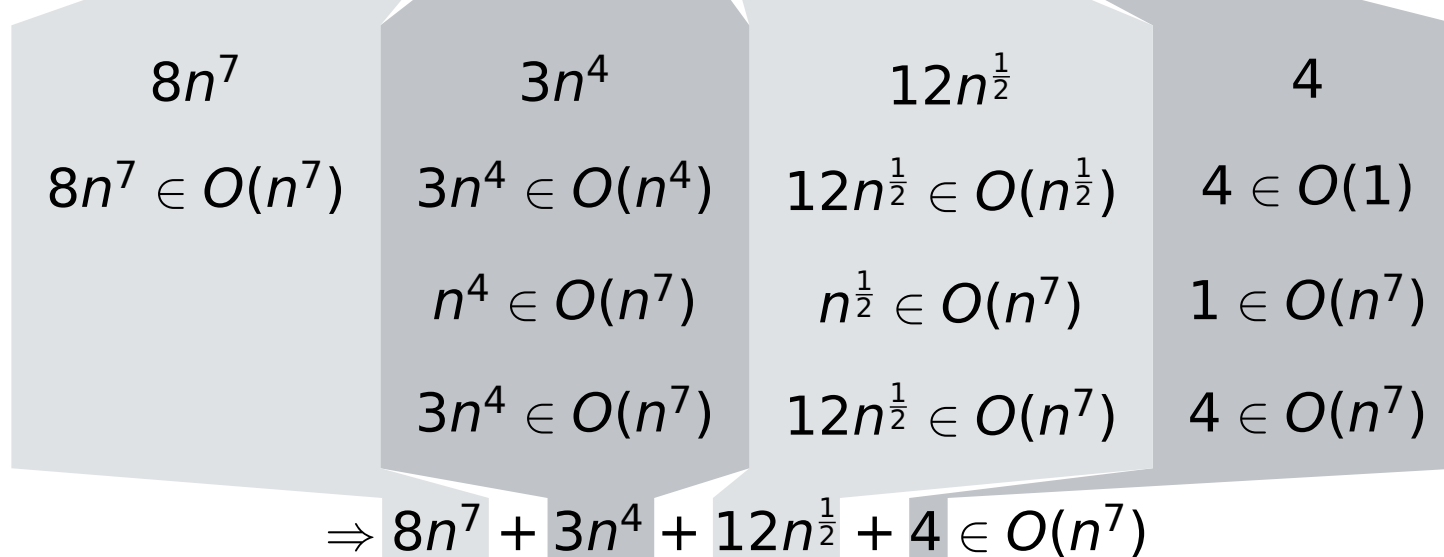
$$\Rightarrow \forall n > \max\{\hat{n}_0, \bar{n}_0\} f_1(n) + f_2(n) \leq \hat{c} \cdot f_3(n) + \bar{c} \cdot f_3(n) = (\hat{c} + \bar{c}) \cdot f_3(n)$$

$$\Rightarrow \exists c \exists n_0 \forall n > n_0 f_1(n) + f_2(n) \leq c \cdot f_3(n) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \in O(f_3(n))$$

$$\hat{c} + \bar{c} \quad \max\{\hat{n}_0, \bar{n}_0\}$$

Zeige: $8n^7 + 3n^4 + 12n^{\frac{1}{2}} + 4 \in O(n^7)$

betrachte Summanden zunächst einzeln



Konst. Faktoren

Monome

Transitivität

Summen

Konstante Faktoren

$$a \cdot h(n) \in O(h(n))$$

Transitivität

$$f_1(n) \in O(f_2(n)) \wedge f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow f_1(n) \in O(f_3(n))$$

Monome

$$a \leq b \Rightarrow n^a \in O(n^b)$$

Summen

$$f_1(n) \in O(f_3(n)) \wedge f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \in O(f_3(n))$$

„Rechenregeln“ für die O-Notation

Konstante Faktoren

$$a \cdot h(n) \in O(h(n))$$

Transitivität

$$f_1(n) \in O(f_2(n)) \wedge f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow f_1(n) \in O(f_3(n))$$

Monome

$$a \leq b \Rightarrow n^a \in O(n^b)$$

Summen

$$f_1(n) \in O(f_3(n)) \wedge f_2(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \in O(f_3(n))$$

- sind oft deutlich handlicher als die formale Definition
- für Produkte kann man etwas ähnliches wie für Summen zeigen

Produkte

$$f_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in O(g_2(n)) \Rightarrow f_1(n) \cdot f_2(n) \in O(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

- für die anderen Symbole (o , Ω , ω , Θ) lassen sich ähnlich Regeln zeigen